HX3 2006/2007 - Dérivation des fonctions à variable réelle

1. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. On suppose f dérivable en x_0. Calculer

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(b + a)h}$$

---

2. **Dérivée symétrique :** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. La limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

lorsqu'elle existe est appelée dérivée symétrique de f en x_0 et est notée $D_s f(x_0)$.

1) Prouver que si $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent, alors $D_s f(x_0)$ existe et vaut $\frac{1}{2}(f'_d(x_0) + f'_g(x_0))$.

2) Montrer que la réciproque du 1) est fausse.

---

3. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, continue. On suppose que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{Q}}} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe. Montrer que f est dérivable en x_0.

---

4. Etudier la dérivabilité de

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

---

5. Etudier la dérivabilité de

1) $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \cos \sqrt{x}$;

2) $x \in \mathbb{R} \longmapsto x|x|$;

3) $x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

4) $x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

---

6. **Dérivation des fonctions paires, impaires ou périodiques :**

1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp. paire).

2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f est T-périodique, f' est T-périodique.

---

7. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. On note $\ln_a$ la bijection réciproque de $x \in \mathbb{R} \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

---

8. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{p=0}^{n} p \cos px, \quad \sum_{p=0}^{n} p^2 \cos px, \quad \sum_{p=0}^{n} p \sin px, \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} p^2 \sin px$$

---

9. Soient a_1,..., a_n dans $\mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |\sin x|$. Montrer que

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant 1$$

---

10. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ dans les cas suivants :

$$f : x \longmapsto (x^3 + 2x - 7)e^x, \quad f : x \longmapsto e^x \cos x \ \ \textit{et} \ \ f : x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 1}$$

---

11. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \arctan x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n\left(f(x)\right)\sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + f(x)\right)\right)$$

---

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n(1-x)^n \in \mathbb{R}$. Calculer le coefficient de x^n dans $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^{k\,2}$.

---

13. Domaine de définition et dérivée des fonctions suivantes

1) $x \longmapsto (x^2+3)(x-2)$;
2) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3+x+1}$;
3) $x \longmapsto \dfrac{2\sin x + 1}{2\sin x - 1}$;
4) $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.
5) $x \longmapsto (x^2-5x+3)\ln x$;
6) $x \longmapsto (x^4-x^2+1)^5$;
7) $x \longmapsto \dfrac{(x^3+1)^3}{(x^2-x+1)^2}$;
8) $x \longmapsto 2\sin^4 x + \sin^3 x - 3\sin x$;
9) $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)+1}{\cos 2x}$;
10) $x \longmapsto x(\ln|x|)^2$;
11) $x \longmapsto \ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$;
12) $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;
13) $x \longmapsto \sqrt{(\ln x)^2+1}$;
14) $x \longmapsto (x^2+x+1)e^x$;
15) $x \longmapsto \dfrac{2^x-1}{2^x+1}$;
16) $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}\ln x$;
17) $x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.