HX3 2006/2007 - Isométries

E désigne un espace affine euclidien de dimension finie, $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Ces espaces seront éventuellement supposé orienté.

---

1. Soient E deux espaces affines euclidiens de dimension finie, $u : E \longrightarrow F$ telle que pour tout $(A, B) \in E^2$, $\|\overrightarrow{u(A)u(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

1) Soit $\Omega \in E$. Pour tout $x \in \overrightarrow{E}$, on note $l(x) = u(\Omega + x) - u(\Omega)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \overrightarrow{E}^2$, on a $(l(x)|l(y)) = (x|y)$.

2) A l'aide de l'exercice 5 du chapitre "Groupe orthogonal", montrer que u est affine.

---

2. On suppose E rapporté à un repère orthonormé. Soit F un sous-espace affine et $M \in E$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur F et la distance de M à F dans les cas suivants :

1) $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et F a pour équation cartésienne $x + 2y + 1 = 0$;

3) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

4) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et F a pour équation cartésienne $x + y - 2z - 1 = 0$;

5) $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

6) $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et F a pour équation cartésienne $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

---

3. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé (Ω, i, j, k). On considère le plan $P : 2x + 2y - z - 1 = 0$, les points $A = (1, 1, -1)$ et $B = (1, 0, 2)$, le vecteur $u = (1, 1, 1)$ et la droite $\Delta = B + \mathbb{R}u$.

1) Calculer $d(A, P)$ et $d(A, \Delta)$.

2) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur P . Déterminer la projection de Δ sur P.

3) Quel est l'angle entre P et Δ.

---

4. **Distance de deux droites dans l'espace :** Dans $\mathcal{E}$, on considère deux droites non parallèles : $\Delta = A + \mathbb{R}u$, $\Delta' = A' + \mathbb{R}u'$.

1) Montrer qu'il existe une unique droite D qui coupe orthogonalement Δ et Δ' (considérer $u \wedge u'$).

2) On note H et H' les points d'intersection de D avec Δ et Δ' respectivement. Prouver que $HH' = \inf_{M \in \Delta, M' \in \Delta'} MM'$ (distance de Δ à Δ').

3) Etablir que :

$$HH' = \frac{|[u, u', \overrightarrow{AA'}]|}{\|u \wedge u'\|}$$

4) Déterminer D, H, H', HH' lorsque :

$$\Delta \ : \ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Delta' \ : \ \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

---

5. **Fonction scalaire de Liebniz :** Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ dans E, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction scalaire de Leibniz par

$$f : M \in E \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|\overrightarrow{A_k M}\|^2 \in \mathbb{R}$$

1) On suppose $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ et on note G le barycentre des (A_k, α_k). Exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$, M et $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. En déduire les lignes de niveaux de f i.e. les ensembles de points M vérifiant $f(M) = C$ où $C \in \mathbb{R}$ est fixé.

2) On suppose $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$ et on note $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$, O quelconque dans E. Prouver que $f(M) = f(O) + 2(\overrightarrow{OM}|u)$. En déduire les lignes de niveaux de f.

3) Soient $(A,B,C,D,E) \in \mathcal{E}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$. Déterminer $\{M \in \mathcal{E},\ \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\lambda\|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{MD}\|^2 + \lambda\|\overrightarrow{ME}\|^2\}$.

---

6. Soient $(ABCD)$ un parallélogramme de $\mathcal{P}$, M (resp. N) le pied de la perpendiculaire menée de C à (AB) (resp. (BD)). Montrer que $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BN} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}$.

---

7. **Sphère circonscrite :** Soient E un espace affine euclidien, $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ une base affine de E. Vérifier l'existence d'un unique $\Omega \in E$ tel que

$$\|\overrightarrow{\Omega A_0}\| = \|\overrightarrow{\Omega A_1}\| = \ldots = \|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$$

et qu'il existe donc une unique sphère de E passant par A_0, A_1,..., A_n.

---

8. Préciser, dans $\mathcal{P}$ supposé orienté, la composée de deux rotations, d'une rotation et d'une translation, d'une translation et d'une rotation.

---

9. On suppose E orienté et rapporté à une repère orthonormé positif. Préciser l'application u de E dans E défini en posant pour x, y et z réels :

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} + 2 \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix},\quad u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} - 1 \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix},\quad u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z+1 \\ -x \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x+2y+2z-2 \\ 2x-y+2z+2 \\ 2x+2y-z+2 \end{pmatrix},\quad u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 \\ x+2 \\ -y+3 \end{pmatrix},\quad u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+2y+2z+1 \\ 2x+y-2z+1 \\ 2x-2y+z \end{pmatrix}$$

---

10. 1) Dans $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (Ω, i, j), écrire analytiquement la réflexion affine qui échange $A = (1,2)$ et $B = (-1,1)$.

2) Dans $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé (Ω, i, j, k), écrire analytiquement la réflexion affine qui échange $A = (1,0,1)$ et $B = (-1,2,0)$.

3) Montrer que la réflexion affine s qui échange A et B distincts dans E est définie par :

$$s(M) = M - 2\frac{(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{IM})}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB} \quad \text{où } I = \frac{A+B}{2}$$

---

11. Sur les cotés d'un triangle (ABC) de $\mathcal{P}$ et extérieurement à celui-ci, on construit trois triangles équilatéraux. Montrer que les isobarycentres de ces trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral.

---

12. Soient D une droite de $\mathcal{P}$ et soient A et B deux points appartenant au même demi-plan ouvert limité par D. Déterminer le point M de D tel que $AM + BN$ soit minimal.

---

13. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le cercle :

$$(C)\ \begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{cases}$$

1) Déterminer le centre et le rayon de (C).
2) Déterminer l'intersection de (C) et des plans $x=0$, $y=0$ et $z=0$.
3) Quels sont les points $M : (x,y,z)$ vérifiant $x^3+y^3+z^3=9$.
4) Quelles sont les tangentes à (C) rencontrant la droite ($x=0$ et $y=0$).

---

14. Soient $T = (A,B,C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, $N = \frac{A+C}{2}$ et $P = \frac{A+B}{2}$. Montrer que (BN) et (CP) sont orthogonales si et seulement si $\|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 5\|\overrightarrow{BC}\|^2$.

---

15. Soient $T = (A,B,C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, H son orthocentre. Montrer que les symétriques de H par rapport à (BC), (CA) et (AB) se trouvent sur le cercle circonscrit à T.

16. Droite de Simson : Soient $T = (A, B, C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, $M \in \mathcal{P}$. Vérifier l'équivalence des conditions suivantes :

(i) Les projetés orthogonaux de M sur (BC), (CA) et (AB) sont alignés (ils définissent alors la droite de Simson de M).

(ii) M est sur le cercle circonscrit à T.

---

17. $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer l'équation du cercle circonscrit à $A = (3, 4)$, $B = (-3, 2)$, $C = (-5, -2)$. Quel est son centre et son rayon?

---

18. Soient A, B et C trois points distincts et alignés de E. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}\backslash(AB)$ tels que (MC) soit une bissectrice de (MA) et (MB).

---

19. Soient $T = (A, B, C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$.

1) Montrer que les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit à T dans la base affine (A, B, C) sont proportionnelles à $(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$.

2) Montrer que les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit à T dans la base affine (A, B, C) sont proportionnelles à $(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$.

3) Montrer que les coordonnées barycentriques de l'orthocentre T dans la base affine (A, B, C) sont proportionnelles à $(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$.

4) Montrer que les coordonnées barycentriques des centres des cercles exinscrit à T dans la base affine (A, B, C) sont proportionnelles à $(-\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$, $(\sin\alpha, -\sin\beta, \sin\gamma)$, $(\sin\alpha, \sin\beta, -\sin\gamma)$.

---

20. Montrer que toute boule de E est convexe.

---

21. Caractérisation des triangles équilatéraux : $\mathcal{P}$ est identifié à $\mathbb{C}$. Soit (a, b, c) un triangle de $\mathcal{P}$. Vérifier l'équivalence des conditions :

(i) (a, b, c) est équilatéral.

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 0$.

---

22. Birapport : Pour quatre points deux à deux distincts de $\mathcal{P}$ identifié à $\mathbb{C}$, A, B, C, D d'affixes respectives a, b, c et d, on définit le birapport par :

$$[a, b, c, d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

1) Montrer que le birapport de quatre points est réels si, et seulement si, ces quatre points sont cocycliques ou alignés.

2) Soient A, B, M et M' distincts dans $\mathcal{P}$ d'affixes a, b, z, z'. On suppose que $[a, b, z, z'] = -1$. On note I le milieu de A et B. Soient m et m' les affixes respectives de $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$. Exprimer mm' a l'aide de a et b. En déduire que (AB) est bissectrice de (IM) et (IM') et prouver :

$$IM.IM' = \frac{1}{4}AB^2$$

---

23. Soient O, A et B trois points distincts de $\mathcal{P}$ et u une similitude directe de centre O. On pose $A' = u(A)$ et $B' = u(B)$. Montrer qu'il existe une similitude directe v de centre O telle que $v(A) = B$ et $v(A') = B'$.

---

24. Soient (AB) et $(A'B')$ deux droites de $\mathcal{P}$ sécantes en S distincts des quatres points A, B, A' et B'. On note P le centre de la similitude directe u qui envoie A sur A' et B sur B'.

1) Montrer que S, P, A et A' sont cocycliques. De même avec S, P, B et B'.

2) En déduire une construction géométrique de P.

---

25. Inversion de pôle Ω et de puissance λ : Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On appelle inversion de pôle Ω de puissance λ l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\backslash\{\Omega\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & \Omega + \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2}\overrightarrow{\Omega M} \end{array}$$

1) Montrer que f est involutive et que pour tout M et N distincts de Ω :

$$\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \frac{|\lambda|}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|\|\overrightarrow{\Omega N}\|}\|\overrightarrow{MN}\|$$

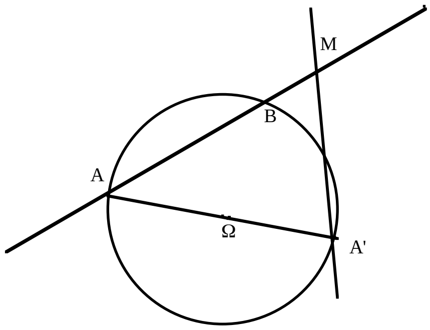
2) Soit $A \subset \mathcal{P}\backslash\{\Omega\}$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) A est une droite affine.
(ii) $f(A)$ est un cercle contenant Ω, mais privé de Ω.
3) Soit C un cercle ne contenant pas Ω. Montrer que $f(C)$ est un cercle ne contenant pas Ω.

---

26. Puissance d'un point par rapport à un cercle : Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, supposé rapporté à un repère orthonormé, (C) un cercle de $\mathcal{P}$ de centre Ω et de rayon R.

1) Soit M un point de $\mathcal{P}$ en dehors du cercle. On considère une droite D passant par M qui coupe (C) en A et B distincts. On note A' le point de (C) diamétralement opposé à A. Montrer que :

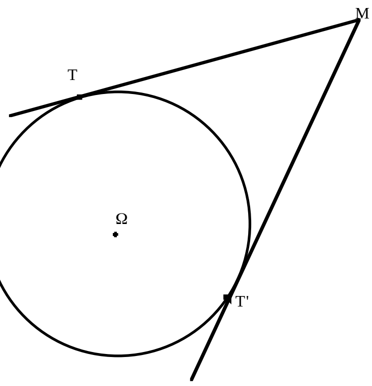
$$\overline{MA}.\overline{MB} = (\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MA'}) = \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - R^2$$



En déduire que le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ ne dépend pas de la sécante issue de M.

On appelle puissance de M par rapport à (C) le réel $P(M) = \overline{MA}.\overline{MB}$. Pour $M \in (C)$, on pose $P(M) = 0$.

2) Soit M un point en dehors de (C), T et T' les points de contact des tangentes à (C) issues de M. Montrer que $P(M) = \|\overrightarrow{MT}\|^2 = \|\overrightarrow{MT'}\|^2$.



3) On suppose (C) d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Montrer que la puissance de $M : (x, y)$ par rapport à (C) est :

$$P(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

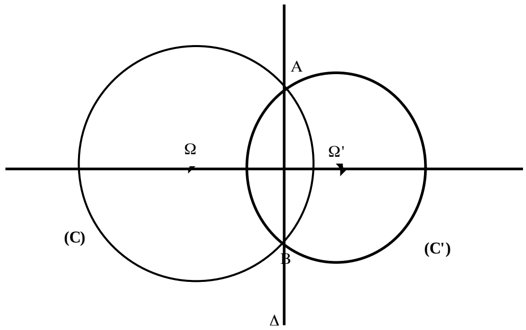
4) a. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4$ trois à trois non alignés et on suppose que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles et se coupent en M. Montrer que A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$.

b. Soient $(A, B, C) \in \mathcal{P}$, $M \in (AB)$. Montrer que le cercle circonscrit à (A, B, C) est tangent à (MC) si et seulement si $\overline{MA}.\overline{MB} = \|\overrightarrow{MC}\|^2$.

5) Soit (C') un autre cercle de rayon R', de centre Ω' différent de celui de (C) : (C) et (C') sont dits non-concentriques. On note P la puissance relative à (C) et P' celle relative à (C').

a. Montrer que l'ensemble des points M tels que $P(M) = P'(M)$ est une droite Δ, orthogonale à $(\Omega\Omega')$, appelée axe radical de (C) et (C').

b. On suppose (C) et (C') sécants en deux points distincts A et B. Montrer que $\Delta = (AB)$.



c. On suppose (C) et (C') tangents en A. Montrer que Δ est alors la tangente commune à (C) et (C') en A.

d. On suppose que $(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $(C') : x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$. Montrer que Δ a pour équation :

$$2(a' - a)x + 2(b' - b)y + (c - c') = 0$$

---

27. Soit A une partie convexe de E. Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

---

28. Soit A un ouvert de E. Montrer que l'enveloppe convexe de A est un ouvert de E.

---

29. 1) Soit $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Préciser $\mathring{\bar{A}}$ et $\overline{\mathring{A}}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$, $\lambda \in]0, 1[$, $(a, b) \in E^2$. On pose $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$. Montrer que, pour tout $\beta \in B(b, \frac{\lambda}{1-\lambda}\varepsilon/2)$ et tout $y \in B(x, (1 - \lambda)\varepsilon/2)$, on a $\dfrac{y - (1 - \lambda)\beta}{\lambda} \in B(a, \varepsilon)$.

3) Soit A une partie convexe de E. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathring{A} \times \bar{A}$, on a $]a, b[\subset \mathring{A}$.

4) Soit A une partie convexe de E telle que $\mathring{A} \neq \emptyset$. Montrer que :

$$\overline{\mathring{A}} = \overline{A} \quad \text{et} \quad \mathring{\bar{A}} = \mathring{A}$$

---

30. Point fixe sur un compact convexe par une application affine : Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, u affine, K un compact convexe non vide de E tel que $u(K) \subset K$. On choisit $a \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u^p(a)$.

1) Vérifier que pour tout $n > 0$, $a_n \in K$ et que $\lim_{n \to +\infty} u(a_n) - a_n = 0$.

2) Conclure que K contient un point invariant par u.

---

31. Théorème de projection sur un convexe fermé : On suppose E euclidien. Soient C un convexe fermé non vide de E, $a \in E$ et $d = d(a, C)$.

1) Etablir le lemme de la médiane : Dans $\mathcal{E}$ espace affine euclidien, on prend A, B et C trois points, I le milieu de B et C. Alors

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2\|\overrightarrow{AI}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|^2$$

2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - a\| = d$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3) Vérifier l'existence d'un unique $h \in C$ tel que $\|h - a\| = d$.

4) Soit $x \in C$. En écrivant que, pour tout $y \in [h, x]$, $\|y - a\| \geqslant d$, montrer que $(h - a|h - x) \leqslant 0$. En déduire lorsque $a \notin C$, l'existence d'un demi-espace fermé contenant C sans contenir a.

---

32. Soit K un compact de E espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer grâce au théorème de Carathéodory (cf. exercice 31), que l'enveloppe convexe de K est compacte.

---

33. Soit C une partie fermée de E telle que pour tout $(a, b) \in C^2$, $\dfrac{a + b}{2} \in C$. Montrer que C est convexe.