HX3 2006/2007 - Développements limités

1. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1) $x = o(\sqrt{x})$ au voisinage de 0.
2) $x^2 = o(x^2+1)$ au voisinage de $+\infty$.
3) $x^2 = o(x^3)$ au voisinage de $+\infty$.
4) $\sin x = x + o(x)$ au voisinage de de 0.
5) $2 - x^2 + x^5 = 2\cos x + o(x^2)$ au voisinage de 0.
6) $1 + x^2 = \cos x + o(x^2)$ au voisinage de 0.
7) $o(f) + o(f) = o(f)$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
8) $o(x) + o(x^2) = o(x)$ au voisinage de 0.
9) $o(x) + o(x^2) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

---

2. Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \ln \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ à l'ordre 4 en 0;
2) $x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 en 0;
3) $x \longmapsto \tan \frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 en 0;
4) $x \longmapsto \sqrt{\tan x}$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$;
5) $x \longmapsto \arctan \sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$;
6) $x \longmapsto (\tan x)^{\tan 2x}$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$;

---

3. Calculer les parties principales des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \operatorname{ch} x - \dfrac{12+5x^2}{12-x^2}$ en 0;
2) $x \longmapsto \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ en 0;
3) $x \longmapsto \operatorname{th}(\tan x) - \tan(\operatorname{th} x)$ en 0;
4) $x \longmapsto \sin(\arctan x) - \arctan(\sin x)$ en 0;
5) $x \longmapsto (e+x)^e - e^{e+x}$ en 0.

---

4. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1/2} (2x^2-3x+1)\tan \pi x;\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x};\quad \lim_{x\to 0} \operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx};\quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos \frac{\pi}{2}x};\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1};\quad \lim_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^x}{\sin(x-2)};\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^x;\quad \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\ln x - \ln a};\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}};\quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x\operatorname{th} x}\operatorname{sh} x;\quad \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{x^2 \ln \operatorname{sh} x};\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(1 - e^{-\operatorname{cotan} x}\right)^{\pi-2x};\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^{\tan x};\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos e^{\frac{1}{1-\sin x}};\quad \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right]\ln x.$$

---

5. Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x^2+3x+2} - \sqrt{9x^2-2x+6}$$

6. Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{x^{\operatorname{sh} x}-(\operatorname{sh} x)^x}{(\sin x)^x - x^{\sin x}}$.

---

7. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\operatorname{ch} n};\quad \lim_{n\to+\infty} (\operatorname{th} n)^n;\quad \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a}-1);\quad \lim_{n\to+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{n}\right);\quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\cos\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\cos a}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} [(a+1)\sqrt[n]{a} - a\sqrt[n]{a+1}]^n;\quad \lim_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}\right).$$

---

8. Montrer que lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

---

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en donner un développement asymptotique avec deux termes.

---

10. 1) Vérifier pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique $x_n \in]n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x_n = x_n$.
2) Montrer alors que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim \frac{-1}{n\pi}$$

3) Donner la partie principale de $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}$ lorsque n tend vers l'infini.

---

11. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère :

$$f:\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\ln x - n \end{array}$$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution et une seule que l'on notera x_n.
2) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers l'infini.

---

12. Soit pour $n\geqslant 1$, $u_n\in[0,1]$ racine de $x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1 = 0$. Prouver l'existence et l'unicité de u_n, la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Déterminer la limite l de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et donner un équivalent de $u_n - l$ lorsque n tend vers l'infini.

---

13. 1) Montrer que, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x>0$ admet une solution et une seule notée x_n.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
3) Etablir $1 - x_n \sim_{n\to+\infty} +\dfrac{\ln n}{n}$.

---

14. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de $+\infty$ $xf(x) = 2x^2 - x + 1 + o(1)$. Montrer que f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.

---

15. Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

---

16. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $0\in I$. On pose pour $x\in I$, $x\neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

---

17. Construire les courbes (C) d'équation $y=f(x)$ où :
1) $f(x) = \ln(1+x)/\ln x$;
2) $f(x) = (x+2)e^{1/x}$;

3) $f(x) = \left(\dfrac{e^x + 1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

4) $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

5) $f(x) = x^{x - x^2}$;

6) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arctan x$.