HX3 2006/2007 - Fonctions intégrables

1. Etudier l'existence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}x,\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}\ t - \cos t}{t^{5/2}}\mathrm{d}t$$

avec $\alpha \in 0, \pi/2[$, $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$.

2. Discuter l'intégrabilité des fonctions f définies sur l'intervalle I :

1) $f : x \longmapsto x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}$, $I = \mathbb{R}_+$.
2) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x + e^{-x}}$, $I = [1, +\infty[$.
3) $f : x \longmapsto \dfrac{x^a}{1 + x^b}$, $I = \mathbb{R}_+^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + e^x |\sin x|}$, $I = \mathbb{R}_+$.
5) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + x^3 \sin^2 x}$, $I = [1, +\infty[$.

3. Soit $\alpha > 1$ un réel.

1) Démontrer que la fonction $x \in [2, +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est intégrable.
2) Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$?

4. Vérifier l'existence et l'égalité des trois intégrales impropres suivantes, et calculer leur valeur commune :

$$I = \int_{]0, \frac{\pi}{2}]} \ln \sin x \ \mathrm{d}x,\quad J = \int_{[0, \frac{\pi}{2}[} \ln \cos x \mathrm{d}x,\quad K = \frac{1}{2} \int_{]0, \pi[} \ln \sin x \mathrm{d}x$$

5. 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$$

et que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-2}.
3) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ et en déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n} I_{2n-2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n} I_{2n+1}$$

5) calculer

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

6. On admettra que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

(voir l'exercice précédent pour le calcul)

1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2}\right) = P_n(x)e^{-x^2}$$

où P_n est un élément de $\mathbb{R}[X]$ dont on déterminera le degré et le coefficient directeur.

2) Calculer pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x$$

---

7. **Césaro fonctionnel :** Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $g \geqslant 0$. On suppose que

$$\lim_{x\to b} f(x) = l \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad g \text{ non intégrable.}$$

On pose pour x assez voisin de b, $h(x) = \dfrac{\displaystyle\int_a^x fg}{\displaystyle\int_a^x g}$

1) On suppose $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, $x_0 \in [a, b[$ tels que

$$(\forall x \in]x_0, b[) \quad \left(|f(x_0) - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Vérifier que pour tout $x \in]x_0, b[$,

$$|h(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left|\displaystyle\int_a^{x_0} fg\right|}{\displaystyle\int_a^x g}$$

En déduire que $\lim\limits_{x\to b} h(x) = 0$.

2) Conclure que $\lim\limits_{x\to b} h(x) = l$. Etendre le résultat au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = \pm\infty$.

---

8. Existence et valeur de

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

---

9. Montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t \text{ existe et qu'elle est nulle.}$$

(On comparera les intégrales sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.)

---

10. Trouver un équivalent lorsque n tend vers l'infini de :

1) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ où $\alpha > 0$;

2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k$;

3) $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

---

11. Trouver la limite lorsque t tend vers 1, par valeurs strictement inférieures, de :

$$f(t) = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$$

12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ intégrable. Etablir à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0$$

---

13. Existence et limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}y$.

---

14. Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable telle que

$$x \longmapsto \frac{f(x)}{x} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[$$

a. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Exprimer pour $\alpha > 0$, $I_\alpha = \displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$

c. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

2) Montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x \text{ existe et calculer sa valeur.}$$

3) Montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x}\mathrm{d}x \text{ existe et calculer sa valeur.}$$

---

15. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ localement réglée.

1) On suppose que f est intégrable et $\lim\limits_{+\infty} f = l \in \bar{\mathbb{R}}$ existe. Que vaut l?

2) On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. f est-elle intégrable?

3) On suppose f intégrable et continue. A t-on $\lim\limits_{+\infty} f = 0$? f est-elle bornée au voisinage de $+\infty$?

4) On suppose f intégrable et uniformément continue. Démontrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

---

16. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose f et f'^2 intégrables. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

---

17. 1) Vérifier, à l'aide d'une intégration par partie, la convergence de

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

2) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t \text{ existe puis que}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

On a en fait $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

---

18. Déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}$.