HX3 2006/2007 - Étude métrique des courbes paramétrées

$\mathcal{P}$ désigne un plan euclidien orienté.

---

1. Cycloïde : On considère l'arc φ défini par $x(t) = a(t - \sin t)$ et $y(t) = a(1 - \cos t)$ où $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

1) Tracer φ.
2) Quelle est la longueur de la courbe entre les points correspondant à $t = 0$ et $t = 2\pi$.
3) Préciser une abscisse curviligne, l'angle orienté α entre i et $\overrightarrow{T}$ et la courbure γ.

---

2. Déterminer une abscisse curviligne, la longueur, l'angle orienté α entre i et $\overrightarrow{T}$, la courbure de la cardioïde définie par l'équation polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

---

3. Calculer une abscisse curviligne, le repère de Frenet, la courbure des courbes définies par :

1) $y = a\mathrm{ch}\,(x/a)$, $a > 0$.
2) $y^2 = 2px$ $(p \neq 0)$.

---

4. Soit $\varphi : t \in I \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$ un arc dont la courbure est constante. Montrer que l'arc est contenu dans un cercle ou une droite affine.

---

5. Déterminer les courbes de classe $\mathcal{C}^2$ dont le rayon de courbure vérifie ces équations :

1) $R = ks$, $k > 0$.
2) $R = \sqrt{a^2 - s^2}$.
3) $aR = a^2 + s^2$ $(a > 0)$.

s désigne une abscisse curviligne.

---

6. Soit $\varphi : t \in I \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$ un arc régulier, s une fonction abscisse curviligne de φ, $\mathcal{R}$ le repère de Frénet en $M(t_0)$ et on note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans ce repère. On note γ_0 la courbure de φ au point $M(t_0)$.

1) Montrer qu'au voisinage de $s_0 = s(t_0)$:

$$x = (s - s_0) + o((s - s_0)^2) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}\gamma_0(s - s_0)^2 + o((s - s_0)^2)$$

2) En déduire que $\gamma_0 = \lim_{s \to s_0} \frac{2y}{x^2}$.

---

7. Développée d'un arc : Soit $\psi : s \in J \longmapsto M(s) \in \mathcal{P}$ un paramétrage normal d'arc de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose l'arc birégulier. On considère la courbe χ définie par $Q(s) = M(s) + R(s)\overrightarrow{N}(s)$ (composée des centres de courbure de l'arc ψ).

1) Calculer $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}Q}}{\mathrm{d}s}$. Préciser sa norme.
2) Préciser une abscisse curviligne σ sur $s \longmapsto Q(s)$. Que peut-on dire de la tangente à χ en $Q(s)$. Commenter géométriquement cette situation.
3) Déterminer la position relative des cercles de courbures en deux points de ψ.

---

8. Déterminer, lorsque que cela est possible, en fonction de (x, y) la dérivée de la fonction implicite définie par l'égalité $x^y = y^x$ $(x > 0, y > 0)$.

---

9. Montrer que la relation proposée définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et former un développement limité à l'ordre n, au voisinage de a, de la fonction implicite $\varphi : x \longmapsto y$.

1) $x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$, $(a, b) = (0, 1)$, $n = 3$.
2) $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + y = 0$, $(a, b) = (0, 0)$, $n = 5$.
3) $xe^y + ye^x - 1 = 0$, $(a, b) = (0, 0)$, $n = 3$.