HX3 2006/2007 - Suites de fonctions

1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions ci-après en précisant pour chacune de ces suites des intervalles de convergence simple et les ensembles de convergence uniforme :

1) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{nx}{1+nx} \in \mathbb{R}$;
2) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{n^2 x}{1+n^3x^2} \in \mathbb{R}$;
3) $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arctan(x/n) \in \mathbb{R}$;
4) $f_n : x \in [-\pi, \pi] \longmapsto n^2\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right)$;
5) $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x\text{sh }(1/nx) \text{ si } x \neq 0 \\ 1/n \text{ si } x = 0 \end{cases}$;

2. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions ci-après en précisant pour chacune de ces suites des intervalles de convergence simple et les ensembles de convergence uniforme :

1) $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{xe^{nx}-1}{e^{nx}+1} \in \mathbb{R}$;
2) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sin\sqrt{x+4n^2\pi^2}$;
3) $f_n : x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[\longmapsto \dfrac{\sin x \cos^n x}{1-\cos x}$;
4) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \begin{cases} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \text{ si } x \in [0,n] \\ 0 \text{ si } x > n \end{cases}$;
5) $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto n^\alpha\left[x^n(1-x)+x(1-x)^n\right]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Etudier la convergence simple et uniforme, puis la continuité de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

1) $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln n \dfrac{\sin nx}{n^3}$;
2) $f_n : x > 0 \longmapsto e^{-n^2x}$;
3) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

4. Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in [-1,1]$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant M(n-1)!$. Étudier la convergence de la suite de fonction $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Que se passe t-il si on suppose seulement $|f^{(n)}(x)| \leqslant Mn!$?

5. Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a,b]$:

$$|f_n'(t)| \leqslant M$$

Montrer que si f_n converge simplement vers une fonction f sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme sur $[a,b]$.

6. Une fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit affine par morceaux s'il existe une subdivision $S = \{a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b\}$ de $[a,b]$ telle que $g_{|]a_{i-1},a_i[}$ est affine pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, affine par morceaux telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. En déduire que f est limite uniforme de fonctions continues et affines par morceaux.

7. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction monotone. Montrer que f est réglée.

8. **Théorème d'Ascoli :** Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue i.e.

$$(\forall x_0 \in [a,b])\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in [a,b])\ (|x-x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f_n(x)-f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon)$$

Montrer que f_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

9. **Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass :**

1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}[X]$$

a. Calculer pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions :

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^k y^{n-k}$$

b. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $r_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(x), \quad \sum_{k=0}^{n} kr_k(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r_k(x)$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x)$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|x - y| \leqslant \eta$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Dans ces conditions, montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \text{ puis que } |f(x) - B_n(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$$

(on pourra considérer les k tels que $|k - nx| \leqslant n\eta$ et ceux tels que $|k - nx| > n\eta$).

d. En déduire que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

2) Soit $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer à l'aide d'un changement de variables affine que F est limite uniforme de polynômes.

---

10. Soit $f : x \in]0, 1] \longmapsto \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f n'est pas limite uniforme d'une suite de polynômes sur $]0, 1]$.

---

11. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynômiale.

---

12. Soit $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions continues. On suppose que cette suite converge simplement vers une fonction f et que pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ convergente vers $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

1) Prouver la continuité de f.
2) En déduire que la convergence est uniforme.

---

13. **Séries entières :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On note $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ ; (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

1) Calculer R pour $a_n = 1$, $a_n = \lambda^n$, $a_n = n$, $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ et $a_n = n!$.
2) Montrer que $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < R$. Montrer que $\sum a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.
3) Montrer que $x \in]-R, R[\longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue.

---

14. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$ et si $n \geqslant 0$:

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}[X + 2P_n - P_n^2]$$

1) Démontrer que si $x \in [0, 1]$,

$$0 \leqslant \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$$

2) En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.

15. **Critère de Cauchy uniforme :** Soit $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de fonctions.

1) On suppose :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in X)(|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon)$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, puis uniformément.

Soit $u_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de fonctions.

2) On suppose :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in X)(|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon)$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge uniformément.