HX3 2006/2007 - Fonctions continues

1. Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Montrer que $f + g = \sup(f, g) + \inf(f, g)$ et $|f - g| = \sup(f, g) - \inf(f, g)$.
2) On suppose f et g continues. Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues.

2. Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $B \subset A$ tel que $A \subset \bar{B}$ et $f_{|B} = g_{|B}$. Montrer que $g = f$.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ (on dit que f est sous-additive). On suppose f continue en 0. Montrer que f est bornée sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}_+$.

4. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1) $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2$.
2) $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)} \in \mathbb{R}$.
3) $f = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$ on pose $f(x) = \dfrac{1}{q}$ où $x = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}^*$, on pose $f(x) = 0$. Etudier la continuité de f.

6. Soient D une partie dense de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue dont la restriction à D est croissante. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

7. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application croissante. Construire une application continue $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f \leqslant g$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et 1 et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

9. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

10. Soient $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup\limits_{t \in [0,x]} f(t) \end{array}$$

Montrer que φ est croissante et continue.

11. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $K > 0$ et $k \geqslant 0$ tel que $a_n \leqslant K n^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $x \in [0, 1[$.

On note pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

2) Etablir que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l$$

12. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x + 1) - f(x)) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

13. Soient $A = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, I un idéal de A. On suppose qu'il existe f_1, f_2,..., f_n dans I telle que

$$\bigcap_{k=1}^{n} f_k^{<-1>}(\{0\}) = \emptyset$$

Montrer que $I = A$.

14. Montrer que l'équation $(E) : x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}$.

15. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose $f(I)$ fini. Montrer que f est constante.

16. Soient I un intervalle $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $|f| = |g|$. On suppose que si $x \in \mathring{I}$, $f(x) \neq 0$. Montrer qu'alors $f = g$ ou $f = -g$.

17. Montrer que toute fonction polynômiale de degré impair s'annule sur $\mathbb{R}$.

18. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet une borne inférieure et que f atteint cette borne.

19. Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue $(a \leqslant b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

20. Soient $p > 0$ et $q > 0$, $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(0) \neq f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0.1[$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p + q)f(c)$.

21. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l < 1$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = c$.

22. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ injective continue. Montrer que f est strictement monotone.

23. Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \geqslant a|x - y|$. Montrer que f est bijective (utiliser l'exercice précédent).

24. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continue.
1) Etablir l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de $a_n \in [0, 1]$ tel que $f(a_n) = a_n^n$.
2) On suppose f strictement décroissante. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique et prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

25. Soit $A = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'anneau des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des idéaux de A non principaux.

26. Montrer que les applications suivantes ne sont pas uniformément continue : $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$, $x > 0 \longmapsto 1/x$, $x \in [0, \pi/2[\longmapsto \tan x$, $x > 0 \longmapsto \ln x$.

27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.
1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $\sqrt[n]{x + y} \leqslant \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$.
2) En déduire que $\sqrt[n]{\ }$ est uniformément continue, mais non lipschitzienne.

28. Soient A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose $\sup f(A) = +\infty$.
1) Construire une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de A telle si $m < n$, $f(x_n) \geqslant f(x_m) + 1$.
2) En déduire que f n'est pas uniformément continue.
3) <u>Application :</u> Montrer que $\ln : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$

29. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique.
1) Montrer que f est bornée.
2) Montrer que f est uniformément continue.

30. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer alors que f est bornée et uniformément continue.

31. Soient $a < b$ et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f admet une limite finie à droite en a.

32. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. On suppose que pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(nt) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

33. Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Etudier :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

---

34. Soient $a<b$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Pour tout $d\in\mathbb{R}_+$, on pose

$$\omega(d)=\sup_{\substack{(x,y)\in[a,b]^2\\|x-y|\leqslant d}}|f(x)-f(y)|$$

1) Montrer que $\omega(0)=0$ et que ω est croissante et continue en 0.
2) Montrer que pour tout d_1, d_2 dans $\mathbb{R}_+$, $\omega(d_1+d_2)\leqslant\omega(d_1)+\omega(d_2)$.
3) En déduire que ω est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $d\in\mathbb{R}_+$, $\omega(nd)\leqslant n\omega(d)$. En déduire que si $\lambda>0$, $\omega(\lambda d)\leqslant(\lambda+1)\omega(d)$.
5) Montrer que s'il existe $\alpha>1$ et $M>0$ tels que pour tout $d\geqslant 0$, $\omega(d)\leqslant Md^\alpha$, f est constante.

---

35. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leqslant a|x|+b$.

---

36. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0,1]$ (resp. $[0,1[$) sur $\mathbb{R}$. Exhiber un homéomorphisme de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

---

37. Montrer que $x\in\mathbb{R}\longmapsto\dfrac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

---

38. Soit $f:x\in\mathbb{R}\longmapsto x^2-3x+2$. Donner une CNS sur a et b réels $(a<b)$ pour que f réalise un homéomorphisme de $[a,b]$ sur $f([a,b])$. Exprimer alors f^{-1}.

---

39. On supposera connus les résultats sur la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.
Soient $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\mathcal{T}=\{t\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},f(x+t)=f(x)\}$ l'ensemble des périodes de f.
1) Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et que, si f est continue, alors $\mathcal{T}$ est fermé.
2) On suppose f continue non constante et $\mathcal{T}\neq\{0\}$. Vérifier l'existence de $a>0$ tel que $\mathcal{T}=a\mathbb{Z}$.
3) Que peut-on dire d'une fonction continue qui admet 1 et $\sqrt{2}$ comme période?

---

40. On supposera connus les résultats de l'exercice 6 sur la topologie de $\mathbb{R}$.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $d(x,A)=\inf_{a\in A}|x-a|$. Montrer que $x\longmapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne et donc continue.

---

41. On supposera connus les résultats de l'exercice précédent. Soient A et B deux parties fermées et disjointes de $\mathbb{R}$.
1) Vérifier l'existence de deux ouverts disjoints U et V tels que $A\subset U$ et $B\subset V$ (considérer $\{x\in\mathbb{R},d(x,A)<d(x,B)\}$ et $\{x\in\mathbb{R},d(x,B)<d(x,A)\}$).
2) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Vérifier l'existence d'une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $[a,b]$ tel que $f_{|A}=a$ et $f_{|B}=b$ (considérer $x\longmapsto\frac{ad(x,B)+bd(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$).

---

42. **Morphismes continus du groupe additif $\mathbb{R}$:** Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même.
1) Montrer que pour tout $(q,x)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$, on a $f(qx)=qf(x)$.
2) En déduire que si f continue, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.

---

43. Trouver toutes les fonctions continues f vérifiant :
1) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (f(x+y)=f(x)+f(y))$;
2) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (f(x+y)=f(x)f(y))$;
3) $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\forall(x,y)\in{\mathbb{R}_+^*}^2)\ (f(xy)=f(x)+f(y))$;
4) $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\forall(x,y)\in{\mathbb{R}_+^*}^2)\ (f(xy)=f(x)f(y))$;
5) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (f(x+y)=f(x)+f(y)+xy)$;
6) $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\forall(x,y)\in{\mathbb{R}_+^*}^2)\ (f(xy)=yf(x)+xf(y))$;
7) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y))$;

---

44. Soit $D = \left\{x \in \mathbb{R},\ \exists (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, x = \dfrac{k}{2^n}\right\}$.

1) Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

3) Montrer que si $f(0) = f(1) = 0$, $f = 0$.

4) Démontrer que f est affine.

---

45. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) f continue.

(ii) Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

---

46. **Image réciproque d'ouverts et de fermés par une application continue :** Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$.

a. Etablir l'existence de U, ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $f^{<-1>}(V) = U \cap A$.

b. En déduire que si A est ouvert dans $\mathbb{R}$ que $f^{<-1>}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) Soit G un fermé de $\mathbb{R}$.

a. Etablir l'existence de F, fermé de $\mathbb{R}$ tel que $f^{<-1>}(G) = F \cap A$.

b. En déduire que si A est fermé dans $\mathbb{R}$ que $f^{<-1>}(G)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

3) On suppose que $A = \mathbb{R}$. Que dire des ensembles suivants : $\{x \in \mathbb{R}, f(x) > 1\}$, $\{x \in \mathbb{R}, -2 \leqslant f(x) \leqslant 3\}$, $\{x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x+1/n) - f(x)| \leqslant \varepsilon\}$, $\{x \in \mathbb{R}, \exists y \geqslant 0, f(x) > 0, f(x+y) < 0\}$.

---

47. **Prolongement par continuité :** Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $a \in \bar{A}$, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, et on pose $g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$.

1) Soient $a \in \bar{A}$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ tels que :

$$(\forall x \in A)\ \left(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - g(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Pour tout $x \in \bar{A}$ avec $|x-a| \leqslant \frac{\eta}{2}$, vérifier l'existence de $y \in A$ tel que $|y-x| \leqslant \frac{\eta}{2}$ et $|g(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Montrer alors que $|g(x) - g(a)| \leqslant \varepsilon$.

2) Conclure que g est continue sur $\bar{A}$ et $g_{|A} = f$.

---

48. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) une application monotone croissante.

1) Soit a un point intérieur de I. Comparer les éventuelles limite à gauche et limite à droite avec $f(a)$.

2) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

---

49. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application admettant en tout $a \in [0,1]$ une limite finie.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $a \in [0,1]$ tels que $|\lim_{x\to a}(f(x) - f(a))| \geqslant \varepsilon$ est fini.

2) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

---

50. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note A l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ pour lesquels f admet un maximum local. Montrer que $f(A)$ est dénombrable.