HX3 2006/2007 - Suites

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On considère les assertions (i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et (ii) $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. A t-on équivalence de ces conditions ? A t-on $(i) \Longrightarrow (ii)$? $(ii) \Longrightarrow (i)$?

2. Calculer les éventuelles limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$; $u_n = \dfrac{E((n+1/2)^2)}{E((n-1/2)^2)}$; $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$; $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$; $u_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{C})$, $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$.

3. Etudier la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$.

4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $[0,1]$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

5. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}(na) + \mathrm{E}(nb) = \mathrm{E}(nc)$. Montrer que $a + b = c$. La réciproque est-elle vraie?

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que pour tout k et n dans $\mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$.
Montrer que u_n converge vers 0.

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Démontrer que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que si $l < 1$, u_n converge vers 0.
2) Montrer que si $l > 1$, u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
3) Etudier le cas $l = 1$.
4) Soit $z \in \mathbb{C}$. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

10. 1) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{C}$.
2) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge t-elle dans $\mathbb{C}$?

11. 1) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$). Montrer que la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.
2) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. Que dire du point de vue de la convergence de la suite $(\sin\sqrt{n}\theta)_{n\geqslant 0}$.

12. En considérant la somme $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$, déterminer la limite de la suite $\left(\sin\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (on admettra que $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
1) Montrer que si u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.
2) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus grand ou un plus petit élément.

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$ et les u_n sont distincts deux à deux. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

15. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2+u_nv_n+v_n^2=0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

---

16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$. On définit pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n^2}$. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

---

17. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1) Montrer par récurrence sur n que pour tout $\alpha\in]0,1[$ et tout $n\geqslant 2$, $(1-\alpha)^n>1-n\alpha$.
2) En prenant $\alpha=\dfrac{1}{n^2}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3) En prenant $\alpha=\dfrac{1}{6n+1}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Conclure.

---

18. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où

$$u_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}\quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

1) Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}^2\leqslant 1+\sqrt{2}u_n$.
2) En déduire que la suite est majorée.
3) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

---

19. Etudier les suites définies par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n^2+1}$; $u_0>0$, $a>0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{a^2}{u_n}\right)$.

---

20. Soit pour tout $n>0$ $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n=\dfrac{U_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n=U_n-2\sqrt{n}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\leqslant\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$.
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1}-2\leqslant U_n$.
3) Etablir que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

---

21. 1) Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels. On suppose que k_n ne diverge pas vers $+\infty$. Démontrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite constante.

2) Soient $x\in\mathbb{R}$ un irrationnel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{Q}$ convergente vers x. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ avec $(p_n,q_n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}|p_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}q_n=+\infty$.

---

22. Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}\right)$$

---

23. Soit $a>0$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $a_0=a$ et pour tout $n\geqslant 1$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}}$. On pose également pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_n=2^n(a_n-1)$ et $y_n=2^n\left(1-\dfrac{1}{a_n}\right)$. Montrer que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que dire du point de vue de la convergence?

---

24. Soit $0<b\leqslant a$. On définit la suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $(x_0,y_0)=(a,b)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}\\ y_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\end{cases}$$

Montrer que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que dire du point de vue de la convergence?

---

25. **Irrationalité de e :** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note

$$u_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\quad\text{et } v_n=u_n+\frac{1}{nn!}$$

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
On note $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) On désire prouver que e est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $e = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En considérant u_q et v_q, aboutir à une contradiction et conclure.

---

26. Montrer que les suites définies par

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{3n^2}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

sont adjacentes.

---

27. **Indénombrabilité de $\mathbb{R}$:** On désire démontrer que $\mathbb{R}$ est indénombrable. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathbb{R} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. A l'aide du théorème des segments emboités, construire une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Conclure.

---

28. **Propriétés des suites sous-additives :** On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on ait : $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$. On note $l = \inf\limits_{n>0} \dfrac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$.

---

29. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone.

---

30. **Théorème de Césaro :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers $l \in \mathbb{K}$.

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$.

a. On suppose $l = 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sum\limits_{p=1}^{n_0} |u_p|}{n}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l = 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

2) Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n = +\infty$. On pose pour n assez grand

$$v_n = \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p u_p}{\sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p}$$

a. On suppose $l = 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sum\limits_{p=1}^{n_0} \lambda_p |u_p|}{\sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l = 0$.

b. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} v_n = l$.

3) Etendre le résultat de la question 2)b. au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = \pm\infty$.

---

31. On supposera connu l'exercice précédent. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$ convergentes respectivement vers a et b. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1}$$

---

32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ convergente vers l. Que dire de la suite $w_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k$ $(n \in \mathbb{N})$? (on s'inspirera d'une méthode proche du théorème de Césaro)

---

33. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers $\geqslant 2$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{k_0 k_1 \dots k_p}$.

1) Montrer que S_n converge vers un réel $l \in]0,1]$.
2) Montrer que si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, $l \in \mathbb{Q}$.

---

34. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

---

35. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - n$.