HX3 2006/2007 - Ensembles finis. Monoïdes

1. Soient E un ensemble fini, $f : E \longrightarrow E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = f^n(E)$ ($f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ avec n facteurs).

1) Montrer que $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et stationnaire de parties de E.

2) On pose $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Montrer qu'en posant pour tout $x \in F$, $f'(x) = f(x)$, on définit une permutation de F.

---

2. Soit E un ensemble non vide. Prouver q'il y a équivalence entre :

(i) E est infini

(ii) Pour toute fonction $f : E \longrightarrow E$, il existe $A \subset E$, $A \neq E$ et $A \neq \emptyset$ tel que $f(A) \subset A$.

---

3. **Applications du principe de Dirichlet :**

1) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que n admet un multiple non nul qui ne s'écrit qu'avec des 0 et 1 en écriture décimale (Considérer pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ les nombres $u_k = 111\ldots11$ qui s'écrivent avec k 1).

2) Soient a_1, a_2,..., a_{10} des entiers. Montrer qu'il existe une somme de $l \geqslant 1$ termes parmi les a_k qui soit divisible par 10.

---

4. On définit sur $\mathbb{Z}$ la loi $*$ par :

$$x * y = x + y - xy \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont dans } \mathbb{Z}.$$

Etudier ses propriétés : associativité, commutativité, élément neutre, éléments absorbants (i.e. un élément x tel que $x = x * y = y * x$ pour tout $y \in \mathbb{Z}$), éléments inversibles. Calculer la puissance n-ième d'un élément.

---

5. Soit M un monoïde. Pour toute partie A de M, on appelle *sous-monoïde engendré par* A l'intersection de tous les sous-monoïdes contenant A.

1) Montrer qu'au sens de l'inclusion le sous-monoïde engendré par A, $\overline{A}$, est le plus petit sous-monoïde contenant A.

2) Décrire les éléments de $\overline{A}$ lorsque $A = \{a, b\}$. Traiter le cas où $ab = 1$.

---

6. **Différence symétrique :** Soit E un ensemble. On définit la loi de composition interne Δ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$A\Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (\complement_E A \cap B)$$

pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soient A, B et C des parties de E.

1) Comparer $A \cap (B\Delta C)$ et $(A \cap B)\Delta(A \cap C)$. Même question en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

2) Calculer $E\backslash(A\Delta B)$.

3) Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un monoïde commutatif. Si A_1, A_2,..., A_n sont des parties de E, montrer que $x \in A_1\Delta A_2\Delta\ldots\Delta A_n$ si et seulement si x appartient à un nombre impair de A_i.

---

7. Soit M un monoïde et $a \in M$. On suppose M fini. Montrer que les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

(i) a régulier à droite;

(ii) a régulier à gauche;

(iii) a inversible à droite;

(iv) a inversible à gauche.

En particulier, vérifier que si a est régulier, a est inversible.

---

8. Soit M un monoïde et $A \subset M$. Montrer que le commutant de A défini par

$$\mathcal{C}(A) = \{x \in M, \forall a \in A,\ ax = xa\} \quad \text{est un sous-monoïde de } M.$$

---

9. Soient E un monoïde, $a \in E$, supposé régulier à gauche (resp. à droite). On suppose qu'il existe une partie F de E finie contenant a, stable pour la loi de E. Montrer que a est inversible et que $a^{-1} \in F$.

---

10. Soit E un monoïde. Pour tout $A \subset E$, on pose $A^\circ = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ ax = xa\}$. Soient A et B deux parties de E. Vérifier

1) $A \subset B \Longrightarrow B^\circ \subset A^\circ$

2) $A \subset A^{\circ\circ}$

3) $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$.

11. **Numération anglaise :** Soit $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement plus grand que 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier $r \geqslant 0$, des entiers a_0, a_1,..., a_r tels que si $0 \leqslant i \leqslant r$, $0 \leqslant a_i < R_{i+1}$, $a_r \neq 0$ et :

$$N = \sum_{i=0}^{r} a_i \left(\prod_{k=1}^{i} R_k\right) = a_r R_1 R_2 \dots R_r + \dots + a_2 R_1 R_2 + a_1 R_1 + a_0$$

---

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1$$

---

13. **Identité d'Al Karagi :** Montrer pour tout $n \geqslant 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n)^2$$

---

14. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(n+1-k),\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1),\ \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n} kl,\ \text{ et } \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} \inf(k,l)$$

---

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k = (-1)^p C_{n-1}^p$.

---

16. Soit $(n, p, k) \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que $C_{n+p}^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_p^{k-i}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

2) Soient E un ensemble à $n+p$ élements, A et B deux parties disjointes de cardinal respectif n et p. En considérant

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

retrouver le résultat de la première question.

---

17. **Formule du crible :** Soit E un ensemble fini, $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de parties de E, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ avec $n \geqslant 1$.

1) Vérifier

$$\operatorname{Card} \bigcup_{i\in I} A_i = \sum_{J\in\mathcal{P}(I)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{1+\operatorname{Card} J} \operatorname{Card} \bigcap_{i\in J} A_i$$

Ecrire explicitement cette égalité pour $n = 2$ et $n = 3$.

2) On suppose $I \neq \emptyset$.

a. Montrer que $\sum_{J\in\mathcal{P}(I)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{1+\operatorname{Card} J} = 1$ à l'aide de la question 1).

b. En déduire

$$\operatorname{Card} \bigcap_{i\in I} A_i = \sum_{J\in\mathcal{P}(I)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{1+\operatorname{Card} J} \operatorname{Card} \bigcup_{i\in J} A_i$$

Ecrire explicitement cette égalité pour $n = 2$ et $n = 3$.

---

18. 1) Pour $0 \leqslant p \leqslant n$ $(n > 0)$, établir $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$ et pour $p > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0$ (On pourra utiliser la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ si $n > 0$).

2) Retrouver la première formule en dénombrant le nombres de couples (A, B) de parties de E, ensemble à n éléments, vérifiant $A \subset B$ et $\mathrm{Card} B = p$.

---

19. 1) Etablir pour $0 \leqslant p \leqslant n$, la formule $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$. Interprétation sur le triangle de Pascal.

2) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

3) Donner une expression simple de $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$.

---

20. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $E = [\![1, n]\!]$ et $F = [\![1, p]\!]$, on note Γ_n^p le nombre d'applications croissantes de E dans F.

1) Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a $\Gamma_n^p = \Gamma_{n-1}^p + \Gamma_n^{p-1}$.

2) Conclure que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\Gamma_n^p = \begin{cases} 1 \text{ si } n = p = 0 \\ C_{n+p-1}^n \text{ sinon.} \end{cases}$

---

21. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$.

1) Montrer que le nombre de suites $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{N}$ telles que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant p$$

est $C_{n+p}^p = C_{n+p}^n$ (on pourra utiliser l'exercice 17).

2) Montrer que le nombre de suites $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{N}$ telles que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$$

est $C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$.

---

22. Etablir que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$

---

23. Soit E un ensemble à np éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties de cardinal p.

---

24. Pour $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\{0, 1\}^n$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, x_i et x_{i+1} ne sont jamais simultanément nuls. Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 3$.

---

25. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{n-k}$.

---

26. Pour tout ensemble fini E de cardinal n on note w_n le nombre de relations d'équivalence de E ($w_0 = 1$ par convention). Montrer que les w_n vérifient : $w_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k w_k$.

---

27. Soit E un ensemble fini de cardinal n, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans E, N le nombre de classes d'équivalence et ν le nombre de couples $(x, y) \in E^2$ tels que $x \mathcal{R} y$.

1) En notant $E_1, \ldots, E_N$ les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$, établir que $\nu = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (\mathrm{Card} E_i)^2$.

2) En déduire que $n^2 \leqslant N\nu$.

On admettra l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{p} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} b_i^2\right)$.

28. Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, on note $P_{n,p}$ le nombre de partitions (ensemblistes) de $[\![1,n]\!]$ en p parties non vides.

1) Montrer que pour tout n et p dans $\mathbb{N}^*$, on a $P_{n+1,p+1} = P_{n,p} + (p+1)P_{n,p+1}$.
2) En déduire $P_{n,p}$ pour $1 \leqslant n,p \leqslant 5$.
3) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$P_{n+1,n} = C_{n+1}^2, \;\; P_{n+1,2} = 2^n - 1, \;\; P_{n+1,3} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}.$$

---

29. Pour tout ensemble fini E de cardinal n, on note u_n le nombre de permutation σ de E telle que $\sigma^2 = I_E$. Trouver une relation de récurrence entre les u_n.

---

30. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p^2+1$. Montrer qu'au moins $p+1$ des x_i sont égaux ou au moins $p+1$ des x_i sont deux à deux distincts.

---

31. 1) Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. Trouver le nombre de manière d'extraire successivement ces quatre boules de telle sorte que la boule p ne sorte pas au p-ième tirage ($1 \leqslant p \leqslant 4$).

Soit I un ensemble fini de cardinal n.

2) Pour tout $i \in I$, on note A_i l'ensemble des permutations de I qui laissent invariant i. Calculer Card $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ en utilisant l'exercice 15.

3) Conclure que le nombre de permutations de I ne laissant invariant aucun éléments de I est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$.

---

32. **Nombres de Catalan :** On considère un ensemble E muni d'une loi de composition $*$ non présumée associative. Pour $n \geqslant 2$ et $x \in E$ on cherche à donner un sens au composé de n termes égaux à x. Pour cela on utilise des paranthèses de façon à n'avoir à opérer que sur deux termes contigus. On désigne par $\mathcal{C}_n$ le nombre de manières différentes dont on peut placer les parenthèses (nombre de Catalan). On convient que $\mathcal{C}_1 = 1$. Montrer que $\displaystyle\mathcal{C}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{C}_k \mathcal{C}_{n-k}$ (une étude analytique montre que $\mathcal{C}_n = \dfrac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}$).

---

33. **Dénombrements au bridge :** On appellera *jeu* un ensemble de 13 cartes parmi 52. Calculer le quotient par le nombre total de jeux possibles du nombre de jeux vérifiant les conditions suivantes :

1) contenant au moins un as, contenant exactement un as;
2) contenant la séquence as, roi, dame, valet, dans une couleur et une seule;
3) ne contenant que trois couleurs au plus, deux couleurs au plus, deux couleurs exactement;
4) présentant la répartition 4-3-3-3;
5) contenant au moins 5 cartes d'une même couleur, exactement 5 cartes d'une même couleur.
6) Justifier la "règle des 9".

---

34. **Dénombrements au poker :** On appellera *jeu* un ensemble de 5 cartes parmi les 32. Calculer le quotient par le nombre total de jeux possibles du nombre de jeux vérifiant les conditions suivantes : contenant une paire, un brelan, un carré, une tierce, une quinte, une quinte flush.

---

35. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On suppose que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a $f(pq) = f(p)f(q)$ et $f(2) = 2$. Démontrer que f est l'identité.

---

36. Soient E et F deux ensembles. Prouver que $\mathcal{P}(E \times F)$, $\mathcal{P}(E)^F$ et $\mathcal{P}(F)^E$ sont équipotents.

---

37. Soient A, B et E trois ensembles.

1) Montrer que si A et B sont équipotents, A^E et B^E le sont aussi.
2) Montrer que $(A^E)^E$ est équipotent à $A^{E \times E}$.
3) Montrer que $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ sont équipotents. En déduire que $[\mathcal{P}(E)]^E$ et $\{0,1\}^{E \times E}$ sont équipotents.

---

38. Soit E un ensemble infini et $x \in E$. montrer que E et $E \backslash \{x\}$ sont équipotents. Exhiber une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1]$.

---

39. Soit $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{(n,n),\ n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer qu'il n'existe pas de recouvrement fini de A constituée d'ensembles du type $I \times J$ avec I et J parties de $\mathbb{Z}$.