HX3 2006/2007 - Anneaux

1. Soient A un anneau, $(a,b) \in A^2$. On suppose que $ab + ba = 1$ et $a^2b + ba^2 = a$.
1) Montrer que $a^2b = ba^2$ et $2aba = a$.
2) Etablir que a est inversible et que son inverse est $2b$.

2. Soit A un anneau tel que pour tout $(x,y) \in A^2$, $(xy)^2 = x^2y^2$.
1) Montrer que pour tout $(x,y) \in A^2$, $xyx = x^2y = yx^2$.
2) En déduire que A est commutatif.

3. 1) Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme de groupes (pour l'addition). Montrer l'existence de $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(k) = kn$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2) Soit $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ un morphisme de groupes (pour l'addition). Montrer l'existence de $a \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
3) Montrer que le seul morphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ dans lui-même est $I_{\mathbb{Z}}$.
4) Montrer que le seul morphisme de l'anneau $\mathbb{Q}$ dans lui-même est $I_{\mathbb{Q}}$.

4. A l'aide de la formule du binôme retouver la relation pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$. En déduire $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant 2k+1\leqslant n} C_n^{2k+1}$.

5. Soit A un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) A corps
(ii) A et $\{0\}$ sont les seuls idéaux de A.

6. **Anneau de Boole :** Soit A un anneau distinct de $\{0\}$ tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$ (A est alors appelé anneau de Boole).
1) Montrer que A est de caractéristique 2 et commutatif.
2) On suppose A intègre. Montrer que $A = \{0, 1\}$.

7. **Nilradical d'un anneau :** Soit A un anneau commutatif. On note N l'ensemble des éléments x de A tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ (N est appelé nilradical de A).
1) Préciser N lorsque $A = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.
2) A l'aide de la formule du binôme, montrer que N est un idéal de A.
3) Soit $x \in N$. Montrer en factorisant $1 - (-x)^n$ (n à choisir) que $1 + x$ est inversible dans A.
4) On suppose A de caractéristique nulle et $\mathbb{Q} \subset A$. Pour tout $x \in N$, on pose $e^x = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$. Justifier cette écriture et vérifier que pour tout $(x,y) \in N^2$, on a $e^x e^y = e^{x+y}$.

8. **Radical d'un anneau :** Soit A un anneau commutatif. On note R l'ensemble des $x \in A$ tel que pour tout $a \in A$, $1 + ax$ est inversible dans A (R est appelé radical de Jacobson de A).
1) Montrer que R est un idéal de A.
2) Vérifier que R est le plus grand idéal de A (au sens de l'inclusion) tel que, pour tout x dans cet idéal, $1 + x$ est inversible dans A.

9. **Racine d'un idéal :** Soit A un anneau commutatif. Pour tout idéal I de A, on note $\sqrt{I}$ l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$ ($\sqrt{I}$ est appelé racine de I).
1) Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.
2) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ et $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
On dit qu'un idéal de A est semi-premier s'il est égal à sa racine.
3) Montrer que l'intersection d'une famille d'idéaux semi-premier de A est un idéal semi-premier de A.
4) Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I}$ est le plus petit idéal semi-premier contenant I

10. **Idéal premier :** Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est premier si

$$I \neq A \quad \text{et} \quad (\forall (x,y) \in A^2)\ (xy \in I \Longrightarrow x \in I \text{ ou } y \in I)$$

1) Soient I un idéal premier de A et I_1, I_2,..., I_n des idéaux de A tels que $I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$. Vérifier l'existence de $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $I = I_k$.

2) On suppose que tous les idéaux distincts de A sont premiers. Montrer que A est un corps.

---

11. Soit A un anneau principal (i.e intègre et dont tous les idéaux sont principaux), $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de A. Prouver que cette suite est stationnaire.

---

12. On note $\mathcal{D} = \{q \in \mathbb{Q}, \exists k \in \mathbb{N}, 10^k q \in \mathbb{Z}\}$ appelé anneau des décimaux.

1) Montrer que $\mathcal{D}$ est un anneau pour l'addition et la multiplication.
2) $\mathcal{D}$ est-il un corps ?
3) Montrer que les idéaux de $\mathcal{D}$ sont principaux.

---

13. Soient K et K' deux corps commutatifs.

1) Montrer que les seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K tout entier.
2) Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de $K \times K'$.
   a. Montrer que s'il existe $(x, y) \in I$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors $I = K \times K'$.
   b. Montrer que s'il existe $(x, y) \in I$ tel que $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0$) alors $K \times \{0\} \subset I$ (resp. $\{0\} \times K' \subset I$).
   c. En déduire les idéaux de l'anneau $K \times K'$.

---

14. On note K l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ du type :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{Q}^2$$

Montrer que K muni des restrictions des lois usuelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ est un corps.

---

15. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Vérifier que $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.

---

16. $*$ Montrer que $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in]-1, 1[\right\}$ est un groupe multiplicatif.

---

17. **Théorème chinois :** Soit A un anneau.

1) Soient I et J deux idéaux tels que $I + J = A$. Vérifier, pour tout $(a, b) \in A^2$ l'existence de $x \in A$ tel que $x \equiv a \pmod I$ et $x \equiv b \pmod J$.

2) Soient I_1, I_2,..., I_n des idéaux de A tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $I_k + (\bigcap_{l \neq k} I_l) = A$. Vérifier que pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$, l'existence de $x \in A$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $x \equiv a_k \pmod{I_k}$.

---

18. **Anneau quotient et théorème d'isomorphisme :** soit A un anneau commutatif et I un idéal de A, distinct de A. On note A/I l'ensemble quotient de A par la congruence modulo I :

$$\forall x, y \in A, \quad x \equiv y \pmod I \iff y - x \in I.$$

1) Pour $x, y \in A$, on pose $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$ et $\overline{x}.\overline{y} = \overline{x.y}$. Montrer que ces lois sont bien définies et qu'elles confèrent à A/I la structure d'anneau.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs.

2) Montrer la congruence modulo $\ker f$ est la relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ associée à f : pour $x, y \in A$, $x \mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y)$.

3) Montrer que l'application

$$\bar{f} : \begin{array}{ccc} A/\ker f & \longrightarrow & \operatorname{im} f \\ \bar{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bien définie et que $\bar{f}$ est un isomorphisme d'anneaux :

$$A/\ker f \simeq \operatorname{im} f.$$

---

19. On suppose connus les résultats de l'exercice précédent : soit A un anneau commutatif, I un idéal de A, distinct de A. Prouver l'équivalence des conditions :

(i) A/I corps
(ii) $I \neq A$ et A est le seul idéal contenant strictement I (on dit que I est maximal).

20. Idéal premier : Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est premier si

$$I \neq A \text{ et } (\forall (x,y) \in A^2)\ (xy \in I \Longrightarrow x \in I \text{ ou } y \in I)$$

1) Soit I un idéal distinct de A. Vérifier l'équivalence des deux propositions suivantes :
(i) I premier
(ii) A/I est un anneau intègre
2) Soient I un idéal premier de A et I_1, I_2,..., I_n des idéaux de A tels que $I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$. Vérifier l'existence de $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $I = I_k$.
3) On suppose que tous les idéaux distincts de A sont premiers. Montrer que A est un corps.

---

21. Théorème chinois : Soit A un anneau.
1) Soient I et J deux idéaux tels que $I + J = A$. Vérifier, pour tout $(a, b) \in A^2$ l'existence de $x \in A$ tel que $x \equiv a \pmod{I}$ et $x \equiv b \pmod{J}$.
2) Soient I_1, I_2,..., I_n des idéaux de A tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $I_k + (\bigcap_{l \neq k} I_l) = A$. Vérifier que pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$, l'existence de $x \in A$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $x \equiv a_k \pmod{I_k}$.

---

22. Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A. Prouver l'équivalence des conditions :
(i) A/I corps
(ii) $I \neq A$ et A est le seul idéal contenant strictement I (on dit que I est maximal).