HX3 2006/2007 - Déterminants

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout (i,j) $a_{ij} \in \{\pm 1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

2. Vérifier les relations suivantes dans K :

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & \gamma & \beta \\ -b & -\gamma & 0 & \alpha \\ -c & -\beta & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = (a\alpha - b\beta + c\gamma)^2$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$$

3. Vérifier les relations suivantes (pour des matrices carrées de taille n) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \equiv 2 \text{ ou } 5 \pmod 6 \\ 1 \text{ si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 6 \\ -1 \text{ si } n \equiv 3 \text{ ou } 4 \pmod 6 \end{cases}$$

4. Vérifier les relations suivantes (pour des matrices carrées de taille n) :

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & & b \\ \vdots & & & \ddots & \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]; \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & -1 & x & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

5. Vérifier les relations suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1}(a_i - b_i); \quad \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^p \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+p}^0 & C_{n+p}^1 & \dots & C_{n+p}^p \end{vmatrix} = 1$$

6. Calculer le déterminant de la matrice $(C_{i+j-2}^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$.

7. Calculer :

$$\det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

---

8. Déterminant de Vandermonde : Pour tout surcorps commutatif L de K et tout $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in L^n$, on note

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1) Soit $(a_1, a_2, \dots a_{n-1}) \in K^{n-1}$. Montrer que

$$V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, X) = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$$

2) En déduire que si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

---

9. Déterminant d'Hürwitz : Soit C_1, C_2,..., C_n dans $\mathbb{K}$, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & a & \dots & a \\ b & C_2 & \dots & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & C_n \end{pmatrix}$$

et H la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Montrer que $P(X) = \det(M + XH) \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

2) En introduisant la fonction $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto (C_1 - x)(C_2 - x) \dots (C_n - x)$, en déduire le déterminant de M lorsque $a \neq b$, puis lorsque $a = b$.

---

10. Déterminant de Cauchy : Soient $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in K^n$ tels que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i + b_j \neq 0$. Montrer

$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \frac{V(a_1, a_2, \dots, a_n)V(b_1, b_2, \dots, b_n)}{\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(a_i + b_j)}$$

où $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. En déduire le déterminant de Hilbert :

$$\det\left(\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$$

---

11. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(K)$. On suppose que la caractéristique de K est différente de 2. Montrer que si A est antisymétrique, $\det A = 0$.

---

12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On suppose que $u^2 = -I_E$. Montrer que n est pair.

---

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que

$$\text{rg com } A = \begin{cases} 0 \text{ si rg } A < n-1 \\ 1 \text{ si rg } A = n-1 \\ n \text{ si rg } A = n \end{cases}$$

---

14. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour tout $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$, on note D_{ij} le cofacteur de a_{ij} dans A. Vérifier que pour tout $x \in K$:

$$\det(x + a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \det A + x \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} D_{ij}$$

---

15. Résoudre les système suivants :

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 3 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = 0 \\ x_1 + 4x_2 + \ldots + n^2 x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + 2^{n-1}x_2 + \ldots + n^{n-1}x_n = 0 \end{cases}$$

---

16. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n+1}(K)$. Pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n+1\}$, on note C_i la i-ème colonne de A, et D_i le cofacteur de "α_i" dans la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{\qquad\quad A \qquad\quad} \\ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} D_i C_i = 0$.

---

17. Soient f_1, f_2,..., f_n dans $\mathcal{F}(X,K)$.

1) Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est libre dans le K-espace vectoriel $\mathcal{F}(X,K)$.

(ii) Il existe a_1, a_2,..., a_n dans X tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$.

2) Soit L un surcorps commutatif de K. Montrer que les rang de $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dans le K-espace vectoriel $\mathcal{F}(X,K)$ et dans le L-espace vectoriel $\mathcal{F}(X,L)$ sont identiques.

---

18. Soit $(\alpha, \beta) \in K^* \times K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

1) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$D_n - (\alpha+\beta)D_{n-1} + \alpha\beta D_{n-2} = 0$$

2) En déduire la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

19. 1) Soient $(A,B,C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^4$ tel que $DC = CD$, D inversible. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

2) Montrer que le résultat reste vrai si D n'est pas inversible.

---

20. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

21. Soit A un anneau commutatif intègre. On note $\mathrm{GL}_n(A)$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(A)$ tel qu'il existe $M' \in \mathcal{M}_n(A)$ avec $MM' = M'M = I_n$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(A)$, démontrer l'équivalence :

$$M \in \mathrm{GL}_n(A) \iff \det M \in A^\times$$

où $A^\times$ désigne le groupe des inversibles de l'anneau A.

---

22. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée complexe inversible avec A et D elles aussi carrées. On écrit $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ avec le même découpage. Trouver une relation entre $\det M$, $\det D$ et $\det A'$.

---

23. **Résultant de deux polynômes :** Soient F et G dans $\mathbb{C}[X]$ où $\deg F = n \geqslant 1$ et $\deg G = m \geqslant 1$.

1) On considère

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_{n+m-1}[X] \\ (U,V) & \longmapsto & UF+VG \end{array}$$

Donner une CNS pour que Φ soit injective. Ecrire la matrice de Φ dans les bases canoniques.

2) Soit $\Gamma = \{(F(t), G(t)) \in \mathbb{C}^2,\ t \in \mathbb{C}\}$. Etablir l'existence de $R \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}^2$:

$$(x,y) \in \Gamma \iff R(x,y) = 0$$

---

24. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

(i) pour tout i, $a_{ii} \neq 0$;

(ii) pour tous i,j distincts, $a_{ij} \neq 0$ implique $a_{ji} = 0$;

(iii) pour tous i,j,k distincts, $a_{ij} \neq 0$ et $a_{jk} \neq 0$ impliquent $a_{ik} \neq 0$.

Calculer $\det A$.

---

25. On suppose que E est un K-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On définit $\varphi : E^n \longrightarrow K$ par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, u(x_2), \dots, x_n) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, u(x_n)).$$

Montrer que $\varphi = \mathrm{Tr} u \det_{\mathcal{B}}$.