HX3 2006/2007 - Matrices. Systèmes linéaires

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Vérifier que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$. A quelle condition A est-elle inversible?

2. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij} \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$$

3. Une autre construction de $\mathbb{C}$: Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Montrer que φ est un isomorphisme de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$ sur la sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des éléménts du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

4. Le corps des quaternions : On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.

5. Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $S(A)$ la somme des termes de A. Montrer que $JAJ = S(A)J$.

6. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$ $AXB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n. Même question avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

8. Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A - \lambda I_n)^k$, puis A^k.

9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

10. Soit $a \in \mathbb{R}$, $D = aI_3$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = D + N$. Vérifier $N^3 = 0$ et $DN = ND$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Soit $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

1) Montrer que pour tout i, j, k et l dans $\{1,2,\dots,n\}$,

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ E_{il} \text{ si } j = k \end{cases}$$

2) Soient $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(i,j,k,l) \in \{1,2\dots,n\}^4$. Montrer $E_{ij}ME_{kl} = m_{jk}E_{il}$.
3) Conclure que les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(K)$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{M}_n(K)$.

12. Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un groupe.

13. Soit

$$G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}\right\}$$

Montrer que G est un groupe multiplicatif isomorphe à $(\mathbb{R},+)$.

14. Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses :

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad (K=\mathbb{Q}); \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \quad (K=\mathbb{C}); \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (K=\mathbb{Q})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (K=\mathbb{Q}); \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & & & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad (K=\mathbb{Q},\ a\neq b,\ a+(n-1)b\neq 0)$$

15. Soient $n \geqslant 2$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $A=(\omega^{(i-1)(j-1)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}=(\overline{\omega}^{(i-1)(j-1)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

16. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que I_n+B (resp. $I_n+A^{-1}BA$) est inversible et calculer son inverse.

17. Soit E l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{,n}(K)$ $(n \geqslant 2)$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & & & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in K^2$.

Montrer que E est une sous-algèbre de dimension 2 de $\mathcal{M}_n(K)$, dont on déterminera les éléments inversibles.

18. Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p=0$ et $A^{p-1}\neq 0$. Montrer que $K[A]=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} KA^k$ est une sous-algèbre de dimension p de $\mathcal{M}_n(K)$ dont on déterminera les éléments inversibles.

19. On supposera la caractéristique de K différente de 2. On note $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$) l'ensemble des éléments M de $\mathcal{M}_n(K)$ tels que ${}^tM=M$ - matrices symétriques - (resp. ${}^tM=-M$ - matrices antisymétriques -). Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(K)$ et que $\mathcal{S}\oplus\mathcal{A}=\mathcal{M}_n(K)$.

20. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie. Vérifier que pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, l'existence de deux isomorphismes v et w de E dans F tels que $u=v+w$.

21. **Lemme d'Hadamard :** Soient $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le système linéaire $S:\ AX=0$.

1) Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution non nulle de S. On choisit $p \in \{1,2,\dots,n\}$ tel que $|x_p|=\sup_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|$.

Montrer que

$$|a_{pp}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq p}} |a_{pj}|$$

2) On suppose que, pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, on a $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

22. Soit $u \in \mathcal{M}_n(K)^*$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ $u(AB) = u(BA)$. Vérifier l'existence de $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda \mathrm{Tr}$ (utiliser la première question de l'exercice 11).

23. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre les équations d'inconnues $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

1) $X = (\mathrm{Tr}X)A + B$;
2) $X +^t X = (\mathrm{Tr}X)A$.

24. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & & & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

25. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K) \quad \text{et} \quad (\sin(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

26. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$ leurs bases duales respectives, P et Q les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ respectivement.

Montrer que $Q =^t P^{-1}$.

27. Les matrices suivantes sont-elles semblables :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Soit p un projecteur d'un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{rg}\ p = \mathrm{Tr} p$.

29. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. On suppose f non constante. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver l'équivalence :

$$A \text{ inversible} \iff f(A) \neq 0$$

30. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$, $u \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

31. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer l'existence d'une base de E telle la matrice de u dans cette base soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note $E_i = \mathrm{Vect}\ (e_1, \dots, e_i)$.

1) Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) A triangulaire supérieure;
(ii) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, E_i est stable par u.
2) Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) A triangulaire supérieure avec éléments diagonaux successifs λ_1, λ_2,..., λ_n;
(ii) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(u - \lambda_i I)(E_i) \subset E_{i-1}$.
Si ces conditions sont réalisées, montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} (u - \lambda_i I) = 0$$

---

33. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in K^2$, $\lambda \neq \mu$ tels que $(u - \lambda I) \circ (u - \mu I) = 0$.
1) Montrer que $\ker(u - \lambda I) \oplus \ker(u - \mu I) = E$.
2) Montrer que l'existence d'une base de E où la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & \mu & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \mu \end{pmatrix}$$

avec sur la diagonale p λ et q μ.

---

34. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $(u - \lambda I)^2 = 0$.
1) Vérifier l'existence de deux sous-espaces F et F' de E tels que

$$F \oplus \text{im } (u - \lambda I) = \ker(u - \lambda I) \ \text{ et } \ F' \oplus \ker(u - \lambda I) = E$$

2) En déduire l'existence d'une base de E où la matrice de u est la forme

$$\text{avec } (p, q) \in \mathbb{N}^2 \ \text{ et } \ N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

---

35. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe a et b dans K tels que $u^2 + au + bI = 0$ et pour tout $\lambda \in K$, $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$.
1) Soit F un sous-espace de E, stable par u, et $e \in E \backslash F$. Montrer que $F + Ke + Ku(e)$ est stable par u et que $u(e) \notin F + Ke$.
2) En déduire l'existence d'une base de E où la matrice de u est de la forme :

$$\text{avec } p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

---

36. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $P = A_{JI}$ une sous-matrice carrée de A. On suppose P inversible et que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \backslash I \times \{1, 2, \dots, p\} \backslash J$, $A_{J \cup \{j\}, I \cup \{i\}}$ est singulière (i.e. non inversible).
Montrer que P est une matrice principale de A.

---

37. Soient $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de K d'éléments deux à deux distincts, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de K telle que pour tout $0 \leqslant i \leqslant n - 1$:

$$\lambda_1^i x_1 + \lambda_2^i x_2 + \ldots + \lambda_n^i x_n = 0$$

Montrer par récurrence que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

38. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-2z=-2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+4y+z=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 3x+8y+3z=4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=2 \\ 4x+5y+6z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=a \\ 4x+y+2z+3t=b \\ 3x+4y+z+2t=c \\ 2x+3y+4z+t=d \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

39. Résoudre les systèmes suivants ($K = \mathbb{C}$) :

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b \\ \vdots \\ x_n = ax_{n-1} + b \\ x_1 = ax_n + b \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{cases} ; \quad ax_j + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} bx_i = 1 \ \ (1 \leqslant j \leqslant n)$$

40. On considère le système réel (S) d'inconnues x, y, z :

$$(S) \begin{cases} x+y+(2m-1)z=1 \\ mx+y+z=1 \\ x+my+z=3(m+1) \end{cases}$$

où m est un paramètre réel. Résoudre (S). Quelle est la structure de l'ensemble des solutions ?

41. 1) Donner un système d'équations cartésiennes pour la droite affine de $\mathbb{R}^3$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Donner un point et un vecteur directeur de la droite de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ 5x-y+2z=-1 \end{cases}$$

42. On considère D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $(1,2,-1)$ et P le plan d'équation $x-y+z=0$. Écrire la matrice de la projection sur D, parallèlement à P dans la base canonique, puis celle de la symétrie par rapport à D parallèlement à P.

43. Soient $(S) : u_j(x) = \alpha_j \ \ (1 \leqslant j \leqslant p)$ un système linéaire sur un K-espace vectoriel E, $J \subset \{1, 2, \ldots p\}$ tel que $(u_j)_{j \in J}$ soit une base de $\sum_{j=1}^{p} Ku_j$, $(S') : u_j(x) = \alpha_j \ \ (j \in J)$ (ce sont les équations principales).
Vérifier l'équivalence des conditions suivantes :
(i) (S) possède au moins une solution.
(ii) Toute équation de (S) est combinaison linéaire de (S').

44. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.
1) Soit $x \in E$ non nul. Montrer qu'il existe $u \in E^*$ tel que $u(x) \neq 0$.
2) Soit $\mathcal{B}'$ une base de E^*. Vérifier l'existence d'une unique base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}'$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.
3) Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de E^*. Quelle est la dimension de $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker u_i$.