HX3 2006/2007 - Espaces vectoriels normés

Sauf mention explicite du contraire, E et F désigne des espaces vectoriels normés.

1. Soit $A \subset E$. Montrer que A est dense dans E si, et seulement si, tout ouvert de E rencontre A.

2. Soient A et B deux parties de E. Montrer que, si A est ouvert, il en est de même de $A + B$.

3. Soient A et B deux parties de E. Montrer que :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

4. Soit $A \subset E$ borné. Montrer que $\bar{A}$ est borné.

5. Si $A \subset E$ non vide, on appelle diamètre de A, $\delta(A) = \sup_{a \in A, b \in A} \|a - b\| \in \bar{\mathbb{R}}$. Soit $A \subset E$.

1) Vérifier que A est borné si, et seulement si, $\delta(A) < +\infty$.
2) Montrer que $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.
3) Lorsque A est compact, vérifier l'existence de $(a, b) \in A^2$ tel que $\|a - b\| = \delta(A)$.

6. 1) Soient $A \subset E$ non vide, $x \in E$. Montrer que $x \in \bar{A}$ si, et seulement si, $d(x, A) = 0$.

2) Soient $A \subset E$ non vide, $(x, y) \in E$. Montrer que :

$$d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$$

3) On pose pour tout $A \subset E$ et $B \subset E$ non vides, on appelle distance de A à B $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$. Montrer que :

$$d(A, B) = d(\bar{A}, B) = d(A, \bar{B}) = d(\bar{A}, \bar{B})$$

7. **Identité du parallélogramme :**

1) Soit E un espace euclidien. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Donner une interprétation géométrique de cette égalité.

2) Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$. On suppose que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

On pose, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

On désire prouver que $(\ | \ )$ est un produit scalaire sur E dont dérive $\| \ \|$.

a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}$, $(x|y) = (y|x)$, $(x|x) = \|x\|^2$ et $(x|x) > 0$ si $x \neq 0$.

b. Soit $(x, y, y') \in E^3$. Démontrer que $(x|y + y') = (x|y) + (x|y')$ en développant $\|x + y + y'\|^2$, $\|x - y - y'\|^2$, $\|x + y - y'\|^2$ et $\|x - y + y'\|^2$.

c. Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ et tout $(x, y) \in E^2$, $(x|\lambda y) = \lambda(x|y)$. Grace à la continuité de $x \longmapsto \|x\|$, établir que cette égalité reste vraie si $\lambda \in \mathbb{R}$.

d. Conclure.

3) Montrer $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_{+\infty}$ ne sont pas des normes euclidiennes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

8. **Supplémentaire orthogonal en dimension infinie :** Soient $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(\ | \ ) : (f, g) \in E^2 \longmapsto (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

et F le sous-espace des fonctions polynômiales. Déterminer $F^{\perp}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

9. Soit $\varphi \in \mathcal{L}^n(E_1 \times \ldots \times E_n, F)$ où les E_i et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie. Montrer qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant k\|x_1\| \ldots \|x_n\|$$

---

10. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective, A un ouvert de E. En choisissant judicieusement des normes sur E et F, prouver que $u(A)$ est un ouvert de F.

---

11. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties compactes non vides de E. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

---

12. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $B \subset E$.

1) On suppose que A est compact et B est fermé. Montrer que $A + B$ est fermé.
2) On suppose A et B compacts. Montrer que $A + B$ est compact.

---

13. **Théorème du point fixe et compacité :** Soient $K \subset E$ compact (E espace vectoriel normé de dimension finie), $f : K \longrightarrow K$ telle que pour tout $(x, y) \in K^2$ avec $x \neq y$:

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

Vérifier l'existence de $a \in K$ telle que $\|f(a) - a\| = \inf_{x\in K} \|f(x) - x\|$. Montrer alors que a est l'unique point invariant de f.

---

14. **Isométrie d'une partie compacte :** On suppose E de dimension finie. Soit $f : K \longrightarrow K$ avec K compact telle que pour tout $(x, y) \in K^2$:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

1) Soit $a \in K$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K en posant $a_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$. A l'aide de cette suite, prouver que $a \in \overline{f(K)}$.
2) Conclure que f est une bijection de K sur K.

---

15. **Prolongement des applications uniformément continue :** Soit F un espace de Banach, $f : A \longrightarrow F$ uniformément continue.

1) Montrer que, pour tout $a \in \bar{A}$, $f(x)$ tend vers une limite notée $\bar{f}(a) \in F$ lorsque x tend vers a dans A.
2) Montrer que l'application $\bar{f}$ est uniformément continue de $\bar{A}$ dans F et que $\bar{f}_{|A} = f$.

---

16. Soit $p \leqslant n$. Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg } A \leqslant p\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

17. **Continuité des applications linéaires :**

1) Soit $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Etablir l'équivalence des quatre propositions suivantes :
(i) u est continue.
(ii) u est continue en 0.
(iii) u est bornée sur $\bar{B}(0, 1)$.
(iv) Il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant k\|x\|$.

2) Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_1 : f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 |f|$. Montrer que $\varphi : f \in E \longmapsto f'(0) \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire non continue.

---

18. On pose $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad (f \in E)$$

On désire prouver que $(E, \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach. On considère donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. En déduire que $f \in E$.
3) Conclure que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E.

---

19. Soient $E=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty}x_n=0\}$ muni de la norme définie par :

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|\quad((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E)$$

Montrer que E est un espace de Banach.

---

20. Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On note pour $f\in E$:

$$N(f)=\sup|f|+\sup_{x\neq y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$$

1) Montrer que N est une norme.
2) Montrer que (E,N) est un espace de Banach.

---

21. Soit $Q\in\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite de polynômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Q.

---

22. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S_p=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

1) Démontrer que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

On note $\exp A=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}=\lim_{p\to+\infty}S_p$.

2) On suppose A diagonalisable. Démontrer que $\det\exp A=\exp\operatorname{Tr}(A)$.
3) Démontrer que si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A+B)=\exp A\exp B$.
4) En déduire que $\exp A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(\exp A)^{-1}=\exp(-A)$.

---

23. **Problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 :** Soient $\varphi,\psi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continues, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy $\mathcal{P}$: trouver $y:I\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^2$, solution

$$(\mathcal{E}):\ y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=0$$

vérifiant $y(a)=\alpha$ et $y'(a)=\beta$.

1) Soient A un fermé de E, espace de Banach, $f:A\longrightarrow A$, $p\in\mathbb{N}$ tel que f^p soit contractante. Montrer qu'alors f admet un unique point fixe $l\in A$.

2) a. Soit $y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Montrer que l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) y est de classe $\mathcal{D}^2$ et solution de $\mathcal{P}$.

(ii) Il existe $z:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue tel que $Y=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}$ tel que

$$Y(x)=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}+\int_a^x A(t)Y(t)\mathrm{d}t$$

où $A:t\in[a,b]\longmapsto\begin{pmatrix}0&1\\-\psi(t)&-\varphi(t)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\ \|$. On définit $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^2)$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$ et :

$$f:\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&E\\Z&\longmapsto&f(Z):x\in[a,b]\longmapsto\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}+\displaystyle\int_a^x A(t)Z(t)\mathrm{d}t\end{array}$$

b. En déduire que $\mathcal{P}$ admet une unique solution si, et seulement si f admet un unique point fixe.

c. Montrer qu'il existe $K>0$ tel que pour tout $t\in[a,b]$:

$$|||A(t)|||\leqslant K$$

où pour tout $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $|||M|||=\sup_{\|X\|\leqslant1}\|MX\|$.

d. Soit $(Z_1,Z_2)\in E^2$. Montrer que pour tout $x\in[a,b]$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\|f^n(Z_1)(x)-f^n(Z_2)(x)\|\leqslant\frac{K^n\|Z_1-Z_2\|_\infty(x-a)^n}{n!}$$

e. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que f^p soit contractante.

3) Montrer que E est un espace de Banach.

4) Conclure que le problème de Cauchy $\mathcal{P}$ admet une unique solution.

---

24. Soit A une partie convexe de E. Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

---

25. Soit A un ouvert de E. Montrer que l'enveloppe convexe de A est un ouvert de E.

---

26. 1) Soit $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Préciser $\mathring{\bar{A}}$ et $\overline{\mathring{A}}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$, $\lambda \in]0,1[$, $(a,b) \in E^2$. On pose $x = (1-\lambda)a + \lambda b$. Montrer que, pour tout $\beta \in B(b, \frac{\lambda}{1-\lambda}\varepsilon/2)$ et tout $y \in B(x, (1-\lambda)\varepsilon/2)$, on a $\dfrac{y-(1-\lambda)\beta}{\lambda} \in B(a,\varepsilon)$.

3) Soit A une partie convexe de E. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathring{A} \times \bar{A}$, on a $]a,b[\subset \mathring{A}$.

4) Soit A une partie convexe de E telle que $\mathring{A} \neq \emptyset$. Montrer que :

$$\overline{\mathring{A}} = \overline{A} \quad \text{et} \quad \mathring{\bar{A}} = \mathring{A}$$

---

27. Point fixe sur un compact convexe par une application affine : Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, u affine, K un compact convexe non vide de E tel que $u(K) \subset K$. On choisit $a \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u^p(a)$.

1) Vérifier que pour tout $n > 0$, $a_n \in K$ et que $\lim_{n\to+\infty} u(a_n) - a_n = 0$.

2) Conclure que K contient un point invariant par u.

---

28. Théorème de projection sur un convexe fermé : On suppose E euclidien. Soient C un convexe fermé non vide de E, $a \in E$ et $d = d(a, C)$.

1) Etablir le lemme de la médiane : Dans $\mathcal{E}$ espace affine euclidien, on prend A, B et C trois points, I le milieu de B et C. Alors

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2\|\overrightarrow{AI}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|^2$$

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - a\| = d$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3) Vérifier l'existence d'un unique $h \in C$ tel que $\|h - a\| = d$.

4) Soit $x \in C$. En écrivant que, pour tout $y \in [h,x]$, $\|y - a\| \geqslant d$, montrer que $(h - a|h - x) \leqslant 0$. En déduire lorsque $a \notin C$, l'existence d'un demi-espace fermé contenant C sans contenir a.

---

29. Soit K un compact de E espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer grâce au théorème de Carathéodory (cf. exercice 31), que l'enveloppe convexe de K est compacte.

---

30. Soit C une partie fermée de E telle que pour tout $(a,b) \in C^2$, $\dfrac{a+b}{2} \in C$. Montrer que C est convexe.