HX3 2006/2007 - Espaces vectoriels de dimension finie

1. Soit K un corps fini de caractéristique finie p. Montrer que $\text{Card}K$ est une puissance de p. Existe t-il un corps à 21 éléments?

2. Vérifier que l'ensemble des fonctions de la forme $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto a\cos(x-\varphi) \in \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension?

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}$. Etudier la liberté de la famille de fonctions $(x \longmapsto \sin(x+a), x \longmapsto \sin(x+b), x \longmapsto \sin(x+c))$ dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto z + a\bar{z} \in \mathbb{C}$ est une endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Déterminer $\ker f$ et $\text{im } f$.

5. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

6. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces de E.

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si

$$\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

7. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E. Vérifier l'existence d'une partie J finie de I telle que $\sum_{i \in J} E_i = \sum_{i \in I} E_i$ (resp. $\bigcap_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in J} E_i$).

8. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, on pose $f(u) = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $g(u) = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $v_n = u_{n+1}$, $w_{n+1} = u_n$ et $w_0 = 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

1) Montrer que f et g sont deux endomorphismes de E.
2) Montrer que f est surjective non injective.
3) Montrer que g est injective non surjective.

9. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang r. Montrer que u est la somme de r endomorphismes de rang 1.

10. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathcal{L}(E)$ est un corps si et seulement si $\dim E = 1$.

11. **Centre de GL (E) :** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E, $u \in \text{GL }(E)$. On suppose que, pour tout $v \in \text{GL }(E)$, on a $u \circ v = v \circ u$. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$$

1) Soit $(p,q) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$ tel que $p \neq q$. Vérifier l'existence de $v \in \text{GL }(E)$ tel que, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, on ait : $v(e_i) = \begin{cases} e_i \text{ si } i \neq p \\ e_p + e_q \text{ si } i = p \end{cases}$. En déduire que $a_{pq} = 0$ et $a_{pp} = a_{qq}$.
2) Conclure que u est une homothétie.

12. Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que

$$\text{rg } u + \text{rg } v - \dim F \leqslant \text{rg } v \circ u \leqslant \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$$

On considèrera le noyau et l'image de $v_{|\text{im } u}$.

13. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\dim\ker u^2 \leqslant 2\dim\ker u$.

14. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}^2(E)$.

1) Démontrer que $|\text{rg } u - \text{rg } v| \leqslant \text{rg }(u+v) \leqslant \text{rg } u + \text{rg } v$.
2) Montrer l'équivalence des propositions :
(i) $\text{rg }(u+v) = \text{rg } u + \text{rg } v$
(ii) $\text{im } u \cap \text{im } v = \{0\}$ et $\ker u + \ker v = E$.

---

15. Soient E un K-espace vectoriel et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un système de n vecteurs de E de rang r.

Montrer que l'ensemble des n-uplets $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ est un sous-espace de K^n de dimension $n - r$.

---

16. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F et F' deux sous-espaces de E.
1) On suppose que F et F' sont distincts de E. Montrer que $F \cup F'$ est distinct de E.
2) On suppose que $\dim F = \dim F'$. Vérifier l'existence d'un supplémentaire commun à F et F'.

---

17. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) On suppose que $\ker u$ possède dans E un supplémentaire F stable par u. Montrer que $F = \text{im } u$.
2) On suppose que $\text{im } u$ possède dans E un supplémentaire F stable par u. Montrer que $F = \ker u$.

---

18. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des deux conditions :
(i) $\ker u = \text{im } u$.
(ii) $u^2 = 0$ et $n = 2\text{rg } u$.

---

19. Soient E et F deux K-espaces vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.
1) Montrer que $\text{im } v$ et $\ker u$ sont supplémentaires.
2) Etablir que u, v, $v \circ u$ et $u \circ v$ ont même rang.

---

20. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. On dit $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $p \geqslant 1$ tel que $u^p = 0$.
1) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Montrer que $(I_E, u, u^2, \ldots, u^{p-1})$ est libre.
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $p_x \geqslant 1$ tel que $u^{p_x}(x) = 0$. Montrer que u est nilpotent.

---

21. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \text{GL }(E)$ et un projecteur p de E tels que $u = v \circ p$

---

22. Soient A une K-algèbre, $a \in A$ supposé régulier à gauche (resp. à droite). On suppose qu'il existe un sous-espace B de A, de dimension finie, multiplicativement stable, et contenant a. Montrer que a est inversible et que $a^{-1} \in B$.

---

23. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.
1) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) de sous-espaces de E. Montrer que cette suite est stationnaire i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant n$, $E_p = E_n$.
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Vérifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant n$ on ait à la fois $\ker u^p = \ker u^n$ et $\text{im } u^p = \text{im } u^n$. Montrer alors que $\ker u^n \oplus \text{im } u^n = E$ et que la restriction de u à $\text{im } u^n$ définit un automorphisme de $\text{im } u^n$.

---

24. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.
1) Montrer que $F = \underset{k\in\mathbb{N}}{\text{Vect}}\ u^k(x)$ est le plus petit sous-espace de E, contenant x et stable par u.
2) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant n$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ soit une base de F.

---

25. 1) Soit L un surcorps commutatif de K. Tout L-espace vectoriel E peut être considérer comme un K-espace vectoriel E_K en munissant $(E, +)$ de la restriction de la multiplication externe à K.

On suppose que E est un L-espace vectoriel de dimension finie n et L un K-espace vectoriel de dimension finie p. Montrer que E_K est un K-espace vectoriel de dimension finie np.

2) Soit $K \subset L \subset M$ trois corps. Si L est de dimension finie comme K-espace vectoriel, on note $[L : K]$ sa dimension. Démontrer l'équivalence des propositions :
(i) M de dimension finie sur K;
(ii) L de dimension finie sur K et M de dimension finie sur L.

Montrer que dans ces conditions $[M : K] = [M : L][L : K]$.

3) On considère $M = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ la sous-algèbre de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{C}$ engendrée par $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Montrer que M est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et préciser la dimension de M (sur $\mathbb{Q}$).

4) Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{p_n})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2^n.

---

26. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(E)$ et pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, $u_1 \circ u_2 + u_2 \circ u_1 = 0$. Montrer que $\mathcal{L}_1 = \{0\}$ ou $\mathcal{L}_2 = \{0\}$.

---

27. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $e \neq 0$ dans E. On suppose que pour tout $x \in E$, $(e, x, u(x))$ sont liés. Montrer l'existence de $\lambda \in K$ et $\mu : E \longrightarrow K$ linéaire tels que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x + \mu(x)e$.