HX3 2006/2007 - Suites définies par récurrence

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que si $n \geqslant n_0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Démontrer qu'il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant A v_n$.

---

2. Déterminer les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0; \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$$

---

3. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ dans les cas suivants :

1) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
2) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} + 2u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
3) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4) $u_0 = 1$, $u_1 = 2i$ et $u_{n+2} = 2(1+i)u_{n+1} - 2iu_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

---

4. Exprimer en fonction de n les suites définies par :

1) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$, et $u_{n+1} - u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$, et $u_{n+1} + 2u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$, et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

5. Soit $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = d(\omega^n, \mathbb{Z})$. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

---

6. Donner en fonction de n les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = 2x_n + 3; \ \ x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + 1)$$

---

7. on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.
2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Quelles sont les valeurs éventuelles de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4) On considère la suite $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on calculera le premier terme et la raison.
5) Étudier la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

8. On considère la suite définie par $u_0 \geqslant 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$.

1) Tracer le graphe de $x \longmapsto \dfrac{4x-9}{x-2}$, préciser les points d'intersection avec la droite $y = x$.
2) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et les valeurs éventuelles de sa limite.
3) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
4) Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

9. Etudier les suites définies par :

1) $u_0 = \pi/4$ et $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2) $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{16} + u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2 + 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

10. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}; \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$$

---

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}$ définie par $u_0 = c$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{au_n + b}$ où $a > 0$, $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$.

1) Comment choisir c pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie?

2) Etudier selon les valeurs de c le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Interprétation graphique (on distinguera les cas $c > l$, $c < l$ et $c = l$).

---

12. **Calcul approché d'une racine carrée :** Soient $1 < a < b$, $f : x \in [1, b] \longmapsto x^2 - a$.

1) Démontrer que la suite définie par la méthode de Newton pour trouver le zéro de f vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

2) Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{a}$.

3) Prouver pour $n \geqslant 0$:

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}|x_n - \sqrt{a}|^2$$

On pose $v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}|x_n - \sqrt{a}|$. Majorer v_n en fonction de v_0.

4) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-15} près.

---

13. Pour chacune des relations suivantes, montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ la vérifiant et calculer une valeur approchée de x à 10^{-7} près :

$$x + \ln x = 0 \text{ et } x > 0; \quad x = \coth x \text{ et } x > 0; \quad \mathrm{ch}\, x = 1 + x \text{ et } x \neq 0; \quad x = 2\mathrm{th}\, x \text{ et } x > 0$$

---

14. On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.

2) Exprimer u_n en fonction de n.

3) Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$. En déduire le pgcd de u_n et u_{n+1}.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_{n-1}u_p + u_n u_{p+1}$. En déduire que $\mathrm{pgcd}(u_{n+p}, u_n) = \mathrm{pgcd}(u_n, u_p)$ et que si $d = \mathrm{pgcd}(n, p)$, $\mathrm{pgcd}(u_n, u_p) = u_d$.

5) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

6) Calculer $\omega = \lim_{n\to+\infty} v_n$ (ω est appelé nombre d'or). Vérifier que $\omega^2 = \omega + 1$.

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\omega = \frac{\omega u_{n+1} + u_n}{\omega u_n + u_{n-1}}; \quad \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} < \omega < \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}; \quad 0 < \omega - \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} < \frac{1}{u_{2n-1}^2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{u_{2n}^2} < \omega - \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} < 0$$

---

15. On supposera connu le théorème de Césaro.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = a$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = a$$

2)a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Etudier :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{C_{pn}^{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$$

3) Soit $u_0 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$$

a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$.
c. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1/2[$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
a. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{1}{n+1}$.
b. En considérant la suite $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$, trouver un équivalent de u_n.

5) Soit $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'au voisinage de l'infini :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

---

16. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5/2$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{1 + u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

---

17. Pour quels $u_0 \in \mathbb{C}$ la suite définie par récurrence en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}$$

est-elle définie? Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

---

18. Étudier la suite de réels définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 3}, ; \quad u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}; \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{2u_n - 3}.$$