HX3 2006/2007 - Espaces vectoriels

1. Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit pour (x,y) et (x',y') dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(x,y)+(x',y') = (xx', y+y') \quad \text{et} \quad \lambda(x,y) = (x^\lambda, \lambda y)$$

Vérifier que E muni de ces lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soient $X \subset \mathbb{R}$ et $E = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ \forall x \in X,\ f(x) = 0\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

3. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}_+$ avec $|f(x)| \leqslant A|x|$ pour tout $x \geqslant a$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

4. Soit $(G,+)$ un groupe abélien. Montrer que G ne peut être muni qu'au plus d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

5. Soient E un K-espace vectoriel et U, V et W trois sous-espaces tels que $U \subset V \cup W$. Prouver que $U \subset V$ ou $U \subset W$.

6. Soient E un K-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espace de E tels que pour tout $(i,j) \in I^2$, il existe $k \in I$ avec $F_i \cup F_j \subset F_k$. Montrer qu'alors $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace de E.

7. Soient E un K-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces. Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :

(i) $F \cup G$ est un sous-espace de E.

(ii) $F \cup G = F + G$.

(iii) $F \subset G$ ou $G \subset F$.

8. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que $u(\ker(v \circ u)) = \ker v \cap \operatorname{im} u$.

9. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1) Etablir que $\ker v \circ u \supset \ker u$ et $\operatorname{im} v \circ u \subset \operatorname{im} v$.

2) Montrer que $\ker v \circ u = \ker u$ (resp. $\operatorname{im} v \circ u = \operatorname{im} v$) si et seulement si $\ker v \cap \operatorname{im} u = \{0\}$ (resp. $\ker v + \operatorname{im} u = F$).

10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) $\operatorname{im} u = \operatorname{im} u \circ u$ (resp. $\ker u = \ker u \circ u$);

(ii) $\operatorname{im} u + \ker u = E$ (resp. $\operatorname{im} u \cap \ker u = \{0\}$);

11. Soient E et F deux K-espace vectoriel, E' un sous-espace de E et $u' \in \mathcal{L}(E',F)$. On suppose que E' possède un supplémentaire dans E.

Vérifier l'existence de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $u_{|E'} = u'$.

12. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) On suppose que u est injective et que $\operatorname{im} u$ possède un supplémentaire dans F. Vérifier l'existence de $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $v \circ u = I_E$.

2) On suppose que u est surjective et que $\ker u$ possède un supplémentaire dans E. Vérifier l'existence de $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $u \circ v = I_F$.

13. Soient E un K-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\Psi_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & u \circ v \end{array}$$

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$ (on dit que u est nilpotent).

(ii) Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Psi_u^n = 0$.

14. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $u(x)$ et x sont colinéaires.

1) On suppose que E possède une base $(e_1, \dots, e_n)$ (E est de dimension finie). Démontrer que u est une hométhétie en considérant $e_1 + \cdots + e_n$.

On ne fait plus d'hypothèse sur E.

2) Soit (x, y) un système libre de E. On écrit $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ avec λ et μ dans K. Montrer que $\lambda = \mu$.
3) En déduire que u est une homothétie.

---

15. **Centre de $\mathcal{L}(E)$:** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$.
On supposera que tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E.
1) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe un projecteur de E sur Kx. En déduire que $u(x) \in Kx$.
2) Déduire de l'exercice précédent que u est une homothétie.

---

16. Soient E et F deux K-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $n \geqslant 1$.
1) Soient E_1, E_2,..., E_n des sous-espaces de E.
a. Montrer que $u\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u(E_i)$.
b. Si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe, peut-on affirmer que $\sum_{i=1}^{n} u(E_i)$ le soit aussi? Examiner le cas u injective.
2) Soient F_1, F_2,..., F_n des sous-espaces de F.
a. Montrer que $u^{<-1>}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \supset \sum_{i=1}^{n} u^{<-1>}(F_i)$. Y a t-il égalité?
b. Si la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, peut-on affirmer que $\sum_{i=1}^{n} u^{<-1>}(F_i)$ le soit aussi? Examiner le cas u injective.

---

17. Soient E un K-espace vectoriel, $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles de sous-espaces de E. On suppose que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $E_i \subset F_i$ et que $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.
Prouver que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $E_i = F_i$.

---

18. Soient E un K-espace vectoriel, F, G, F' et G' des sous-espaces. On suppose $E = F \oplus G$, $E = F' \oplus G'$ et $F' \subset G$. Montrer que $F \oplus F' \oplus G \cap G' = E$.

---

19. Soient E un K-espace vectoriel (K supposé de caractéristique différente de 2), $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans E. On pose

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions paires, $\mathcal{I}$ est l'ensemble des fonctions impaires.
1) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}$.
2) On note :

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_0 = \{f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) \text{ et } f(0) = 0\}$$

Montrer directement que $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}_0$ sont des sous-espaces de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{C} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}$.

---

20. Soient E_1, E_2,..., E_n des sous-espaces de E. Vérifier l'équivalence des deux conditions :
(i) $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ est directe;
(ii) Pour tout $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $(E_1 + E_2 + \ldots + E_{k-1}) \cap E_k = \{0\}$.

---

21. Soient E un K-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, λ_1, λ_2,..., λ_n n éléments de K deux à deux distincts. Démontrer que la somme :

$$\ker(u - \lambda_1 I) + \ker(u - \lambda_2 I) + \ldots + \ker(u - \lambda_n I) \quad \text{est directe.}$$

---

22. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{L}(E)$.
1) Montrer que $\bigcap_{k=1}^{n} \ker(u_k - I) \subset \ker(u_1 \circ \ldots \circ u_n - I)$.
2) On suppose la somme $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{im}\ (u_k - I)$ est directe. Montrer que $\bigcap_{k=1}^{n} \ker(u_k - I) = \ker(u_1 \circ \ldots \circ u_n - I)$.

---

23. **Caractérisation des affinités :** Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$, $\lambda \neq 1$.

1) Montrer que u est une affinité de rapport λ si, et seulement si, il existe p projecteur de E tel que $u = \lambda I + (1-\lambda)p$.
2) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) u est une affinité de rapport λ.
(ii) $(u - I_E) \circ (u - \lambda I_E) = 0$.

---

24. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Etudier la liberté de la famille de fonctions :
1) $(x \longmapsto |x - \alpha|)_{\alpha \in [0,1]}$;
2) $(x \longmapsto e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$;
3) $(x \longmapsto \cos nx)_{n \in \mathbb{N}}$;
4) $(x \longmapsto \sin nx)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

---

25. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On pose pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $v_i = u + e_i$.

Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est lié si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

---

26. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note c_k (resp. s_k) l'élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c_k(x) = \cos kx$ (resp. $s_k(x) = \sin kx$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par c_0, c_1,..., c_n, s_1, s_2,..., s_n.

Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $c_1^p s_1^q \in E_{p+q}$.

---

27. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note c_k (resp. s_k) l'élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c_k(x) = \mathrm{ch}\ kx$ (resp. $s_k(x) = \mathrm{sh}\ kx$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par c_0, c_1,..., c_n, s_1, s_2,..., s_n.

Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $c_1^p s_1^q \in E_{p+q}$.

---

28. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n n'est le carré d'aucun entier. Montrer que :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \left\{a + b\sqrt{n} \in \mathbb{C},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$

est une sous-algèbre de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{C}$, puis que c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que $(1, \sqrt{n})$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$.

---

29. 1) On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.
2) En déduire qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $r > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.

---

30. Soient p un projecteur de E, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\ker p$ et $\mathrm{im}\ p$ sont stables par u.

---

31. Soient p et q deux projecteurs de E et $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. On suppose que $p \circ q = \alpha q \circ p$. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.

---

32. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{im}\ p = \mathrm{im}\ q$ et $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p = q$.

---

33. Soit E un K-espace vectoriel. Montrer que le sous-groupe des homothéties est distingué dans $\mathrm{GL}\ (E)$.

---

34. Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels. Montrer que $\mathcal{L}(E \times F, G)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, G) \times \mathcal{L}(F, G)$.

---

35. Soient E un K-espace vectoriel, F un sous-espace et $A = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset F\}$. Vérifier que A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

---

36. Soient K un corps infini, E un K-espace vectoriel, $(F_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de sous-espaces stricts i.e. pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $F_k \subsetneq E$. Montrer que $E \neq \bigcup_{k=1}^{n} F_k$.

---

37. Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
1) $(x \longmapsto \sin(x^n))_{n \geqslant 0}$;
2) $(x \longmapsto \cos(x^n))_{n \geqslant 0}$;

3) $(x \longrightarrow \sin x,\ x \longmapsto \sin\sin x,\ x \longmapsto \sin\sin\sin x)$.