HX3 2005/2006 - Géométrie affine euclidienne

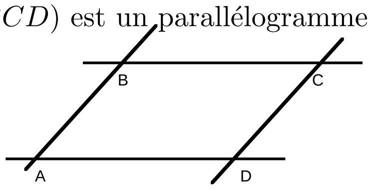
E désigne un espace euclidien $\mathcal{P}$ un plan euclidien réel et $\mathcal{E}$ un espace vectoriel réel de dimension 3. Eventuellement, après le choix d'une base directe, on peut considérer que ce sont des espaces orientés.

---

1. Soit $F \subset E$ non vide. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
(i) F est un sous-espace affine.
(ii) Pour tout $(A,B) \in F^2$ avec $A \neq B$, la droite (AB) est contenu dans F.

---

2. **Parallélogramme :** On dit que $(ABCD)$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



1) Soient $(A,B,C,D) \in E^4$. Vérifier l'équivalence des propositions :
(i) $(ABCD)$ est un parallélogramme;
(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
(iii) $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$: on dit que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
2) Soit $(A,B,C,D) \in E^4$. Montrer que $\left(\frac{A+B}{2}\frac{B+C}{2}\frac{C+D}{2}\frac{D+A}{2}\right)$ est un parallélogramme.
3) Soient A, B, C, D dans E tous distincts et non alignés. Vérifier l'équivalence des propositions :
(i) $(ABCD)$ parallélogramme;
(ii) (AB) parallèle à (CD) et (AD) parallèle à (BC).

---

3. Soient A, B, C, A', B' et C' six points de E, G (resp. G') l'isobarycentre de A, B et C (resp. A', B' et C').
1) Montrer que :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

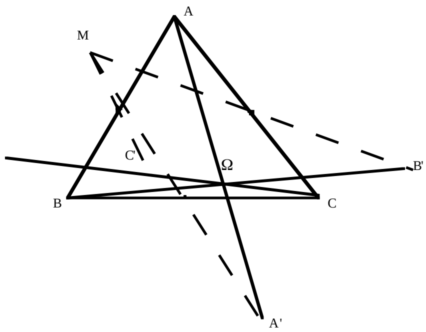
2) Montrer que G et G' sont confondues si et seulement s'il existe $M \in E$ tel que $(BA'CM)$ et $(B'AC'M)$ soient des parallélogrammes.

---

4. Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

---

5. Soit $(A,B,C,M) \in E^4$. On note A', B', C' les symétriques de M par rapport à $\frac{B+C}{2}$, $\frac{C+A}{2}$ et $\frac{A+B}{2}$ respectivement. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.



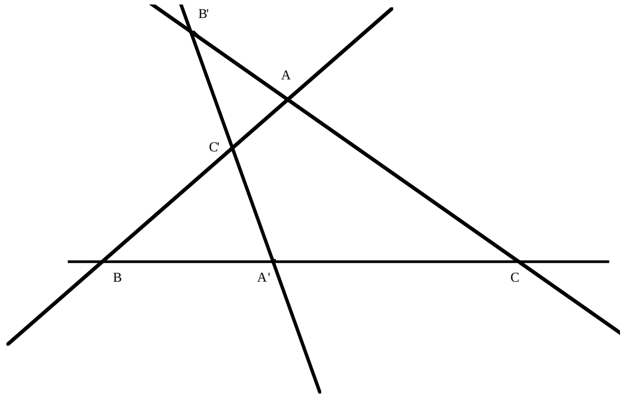
---

6. **Théorème de Ménélaüs et théorème de Céva :** Soient (ABC) un triangle (i.e. trois points non alignés) de E, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, distincts des sommets. Si M, P, Q sont alignés avec $M \neq P$, on note $\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}$ l'unique scalaire tel que

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}\overrightarrow{MP}$$

1) Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si :

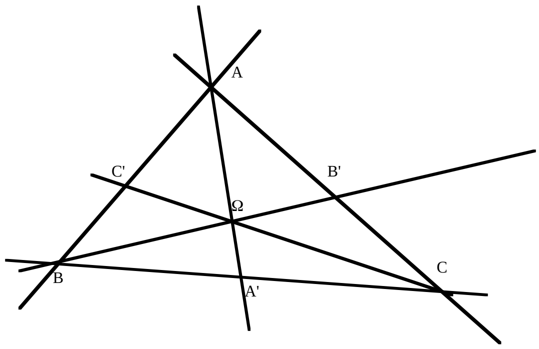
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \quad \text{(Théorème de Ménélaüs)}$$



Théorème de Ménélaüs

2) Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \quad \text{(Théorème de Céva)}$$



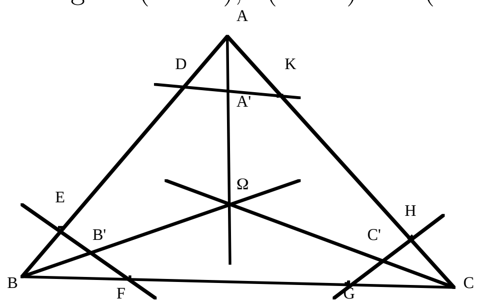
Théorème de Céva

---

7. Soient A, B, C et M quatre points de $\mathcal{P}$, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les parallèles à (MA') menée par A, à (MB') menée par B et à (MC') menée par C sont concourantes.

---

8. Soit (ABC) un triangle du plan $\mathcal{P}$. Sur chaque coté $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$, on choisit respectivement des segments $[DE]$, $[FG]$ et $[HK]$ de mêmes milieux que ces cotés. Montrer que les médianes (AA'), (BB'), (CC') des triangles (ADK), (BFE) et (CHG) sont concourantes ou parallèles.



---

9. Soient $u \in \mathcal{A}(E)$. On suppose que $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = I_{\overrightarrow{E}}$. Montrer alors qu'il existe un unique couple (t, s) où t est une translation de E et s une symétrie affine telle que $u = s \circ t = t \circ s$.

---

10. Trouver toutes les applications affines de E qui commutent avec n'importe quelle translation de E.

---

11. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. On suppose que u transforme toute droite D de E en une droite parallèle à D. Montrer que u est une homothétie ou une translation.

---

12. Soient $u \in \mathrm{GA}\ (E)$. On note $h_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 0$. Montrer que $u \circ h_{\Omega,k} \circ u^{-1}$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

---

13. Soient $x \in \overrightarrow{E}$, $x \neq 0$, h une homothétie de centre Ω et de rapport k. Préciser $h \circ t_x \circ h^{-1}$ et $t_x \circ h \circ t_x^{-1}$.

---

14. On note G l'ensemble des symétries par rapport à un point et des translations. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GA}\ (E)$.

---

15. Soient $u \in \mathcal{A}(E)$, X une partie finie non vide de E stable par u.

1) On suppose que $u(X) = X$. Montrer que l'isobarycentre de X est invariant par u.

2) On note $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u^n(X)$. Montrer que $Y \neq \emptyset$ et $u(Y) = Y$. En déduire l'existence d'un point de E invariant par u.

---

16. 1) Soit G un sous-groupe fini de GA (E). Montrer qu'il existe $\Omega \in E$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(\Omega) = \Omega$.

2) Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = I_E$. Montrer que u admet un point fixe.

---

17. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ sans aucun point fixe. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u^n est aussi sans point fixe.

---

18. Préciser l'application $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini en posant pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

1) $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 4y + 2z - 4 \\ -2x - 3y - 2z + 2 \\ 4x + 8y + 5z - 8 \end{pmatrix}$

2) $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z + 1 \\ x - 2y + z + 1 \\ x + y - 2z - 1 \end{pmatrix}$

---

19. **Caractérisation des projections et des symétries :** Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.

1) Montrer que u est une projection si, et seulement si, $u \circ u = u$.

2) Montrer que u est une symétrie si, et seulement si, $u \circ u = I_E$.

---

20. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ tel que, pour tout point $M \in E$, $u^2(M)$ soit le milieu de $[M, u(M)]$. Montrer que u est une affinité.

---

21. Soient A, B, C, D quatre points distincts de E et non alignés. On suppose que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (on dit que $(ABCD)$ est un trapèze) et que, ni $(ABCD)$, ni $(ACBD)$ ne sont des parallélogrammes.

1) Vérifier l'existence d'une unique homothétie transformant A en D et B en C (resp. A en C et B en D).

2) Soient Ω et Ω' les centres des homothéties définies à la question précédente. Montrer que les quatre points Ω, Ω', $\frac{A+B}{2}$ et $\frac{C+D}{2}$ sont alignés.

---

22. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les cinq points $A = (1, 2, -1)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (2, 1, -1)$, $D = (1, 0, 4)$ et $E = (-1, 1, 1)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans (ABC) et (ADE).

---

23. Dans $\mathcal{E}$, deux plans parallèles coupent trois droites concourantes en A, B, C et A', B', C' respectivement. On note I, J et K les milieux de $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$ respectivement. Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes ou parallèles deux à deux.

---

24. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère. Montrer que les représentations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{array}\right. \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{array}\right. \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

définissent le même plan.

---

25. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'intersection de :

$$(P_1)\ \lambda x + \mu y = 1, \quad (P_2)\ \mu x + \lambda x + z = 0, \quad (P_3)\ x + \lambda y + \mu z = 1, \quad \text{et} \quad (P_4)\ \mu x + y + \lambda z = 0$$

soit réduite à un point.

---

26. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère les deux droites :

$$(D) \left\{\begin{array}{l} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right., \quad (D') \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{array}\right.$$

1) Montrer que (D) et (D') ne sont pas parallèles.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que (D) et (D') soient concourantes. Donner alors l'équation du plan qu'elles engendrent.

---

27. Soient C_1 et C_2 deux convexes de E. Montrer que l'ensemble des milieux des segments $[M_1, M_2]$ où M_1 décrit C_1 et M_2 décrit C_2 est convexe.

---

28. Soit H un hyperplan affine de E.

1) Vérifier qu'un demi-espace affine de E, limité par H est convexe.
2) Soient A et B dans $E \backslash H$. Montrer que A et B sont du même coté de H si, et seulement si, $[A, B] \cap H = \emptyset$.

---

29. **Théorème de Gauss-Lucas :** Soient P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, α_1, α_2,..., α_n les racines distinctes ou confondues de P.

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z} - \overline{\alpha_k}}{|z - \alpha_k|^2}$$

2) En déduire que toutes les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

---

30. **Théorème de Helly :** On suppose $\dim E = n$. On se donne A_1, A_2,..., A_{n+2} des parties convexes de E telles pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n+2\}$:

$$\bigcap_{i \neq k} A_i \neq \emptyset$$

Montrer alors que :

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} A_i \neq \emptyset$$

On prendra pour cela $M_k \in \bigcap_{i \neq k} A_i$ et on écrira une relation de liaison affine entre M_1, M_2,..., M_{n+2} en distinguant les coefficients positifs ou nuls, puis les coefficients strictement négatifs.

---

31. **Théorème de Carathéodory :** On suppose que $\dim E = n$. Soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille finie de points de E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Enfin, on pose $M = \sum_{i \in I} \lambda_i M_i$.

1) On suppose que I contient au moins $n+2$ éléments et on considère une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ non nulle de $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 0$ et $\sum_{i \in I} \alpha_i M_i = 0$. En posant

$$\lambda = \inf \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \alpha_i > 0 \right\}$$

et en considérant $M - \lambda 0$, vérifier l'existence de J strictement inclus dans I et $(\mu_j)_{j \in J}$ une famille de $\mathbb{R}_+$ tels que

$$\sum_{j \in J} \mu_j = 1 \quad \text{et} \quad M = \sum_{j \in J} \mu_j M_j$$

2) En déduire l'existence de $K \subset I$ de cardinal inférieur à $n+1$ et d'une famille $(\nu_k)_{k \in K}$ de $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\sum_{k \in K} \nu_k = 1 \quad \text{et} \quad M = \sum_{k \in K} \nu_k M_k$$

3) Conclure que si C est l'enveloppe convexe d'une partie A de E, tout point de C s'exprime comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $n+1$ points de A.

---

32. Soient E deux espaces affines euclidiens de dimension finie, $u : E \longrightarrow F$ telle que pour tout $(A, B) \in E^2$, $\|\overrightarrow{u(A)u(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

1) Soit $\Omega \in E$. Pour tout $x \in \overrightarrow{E}$, on note $l(x) = u(\Omega + x) - u(\Omega)$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \overrightarrow{E}^2$, on a $(l(x)|l(y)) = (x|y)$.
2) A l'aide de l'exercice 5 du chapitre "Groupe orthogonal", montrer que u est affine.

---

33. On suppose E rapporté à un repère orthonormé. Soit F un sous-espace affine et $M \in E$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur F et la distance de M à F dans les cas suivants :

1) $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et F a pour équation cartésienne $x + 2y + 1 = 0$;

3) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

4) $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et F a pour équation cartésienne $x + y - 2z - 1 = 0$;

5) $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

6) $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et F a pour équation cartésienne $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right.$

---

34. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé (Ω, i, j, k). On considère le plan $P : 2x + 2y - z - 1 = 0$, les points $A = (1, 1, -1)$ et $B = (1, 0, 2)$, le vecteur $u = (1, 1, 1)$ et la droite $\Delta = B + \mathbb{R}u$.

1) Calculer $d(A, P)$ et $d(A, \Delta)$.

2) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur P . Déterminer la projection de Δ sur P.

3) Quel est l'angle entre P et Δ.

---

35. **Distance de deux droites dans l'espace :** Dans $\mathcal{E}$, on considère deux droites non parallèles : $\Delta = A + \mathbb{R}u$, $\Delta' = A' + \mathbb{R}u'$.

1) Montrer qu'il existe une unique droite D qui coupe orthogonalement Δ et Δ' (considérer $u \wedge u'$).

2) On note H et H' les points d'intersection de D avec Δ et Δ' respectivement. Prouver que $HH' = \inf_{M \in \Delta, M' \in \Delta'} MM'$ (distance de Δ à Δ').

3) Etablir que :

$$HH' = \frac{|[u, u', \overrightarrow{AA'}]|}{\|u \wedge u'\|}$$

4) Déterminer D, H, H', HH' lorsque :

$$\Delta \ : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \Delta' \ : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 5 \\ x - z = 3 \end{array} \right.$$

---

36. **Fonction scalaire de Liebniz :** Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ dans E, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction scalaire de Leibniz par

$$f : M \in E \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|\overrightarrow{A_k M}\|^2 \in \mathbb{R}$$

1) On suppose $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ et on note G le barycentre des (A_k, α_k). Exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$, M et $\sum_{k=1}^n \alpha_k$. En déduire les lignes de niveaux de f i.e. les ensembles de points M vérifiant $f(M) = C$ où $C \in \mathbb{R}$ est fixé.

2) On suppose $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$ et on note $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$, O quelconque dans E. Prouver que $f(M) = f(O) + 2(\overrightarrow{OM}|u)$. En déduire les lignes de niveaux de f.

3) Soient $(A, B, C, D, E) \in \mathcal{E}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$. Déterminer $\{M \in \mathcal{E},\ \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\lambda \|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{MD}\|^2 + \lambda \|\overrightarrow{ME}\|^2\}$.

---

37. Soient $(ABCD)$ un parallélogramme de $\mathcal{P}$, M (resp. N) le pied de la perpendiculaire menée de C à (AB) (resp. (BD)). Montrer que $\overline{BD}.\overline{BN} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overline{BA}.\overline{BM}$.

---

38. **Sphère circonscrite :** Soient E un espace affine euclidien, $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ une base affine de E. Vérifier l'existence d'un unique $\Omega \in E$ tel que

$$\|\overrightarrow{\Omega A_0}\| = \|\overrightarrow{\Omega A_1}\| = \ldots = \|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$$

et qu'il existe donc une unique sphère de E passant par A_0, A_1,..., A_n.

---

39. Préciser, dans $\mathcal{P}$ supposé orienté, la composée de deux rotations, d'une rotation et d'une translation, d'une translation et d'une rotation.

---

40. On suppose E orienté et rapporté à une repère orthonormé positif. Préciser l'application u de E dans E défini en posant pour x, y et z réels :

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} + 2 \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix}, \quad u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} - 1 \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix}, \quad u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z+1 \\ -x \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x+2y+2z-2 \\ 2x-y+2z+2 \\ 2x+2y-z+2 \end{pmatrix}, \quad u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 \\ x+2 \\ -y+3 \end{pmatrix}, \quad u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+2y+2z+1 \\ 2x+y-2z+1 \\ 2x-2y+z \end{pmatrix}$$

---

41. 1) Dans $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (Ω, i, j), écrire analytiquement la réflexion affine qui échange $A = (1, 2)$ et $B = (-1, 1)$.

2) Dans $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé (Ω, i, j, k), écrire analytiquement la réflexion affine qui échange $A = (1, 0, 1)$ et $B = (-1, 2, 0)$.

3) Montrer que la réflexion affine s qui échange A et B distincts dans E est définie par :

$$s(M) = M - 2\frac{(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{IM})}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB} \quad \text{où } I = \frac{A+B}{2}$$

---

42. Sur les cotés d'un triangle (ABC) de $\mathcal{P}$ et extérieurement à celui-ci, on construit trois triangles équilatéraux. Montrer que les isobarycentres de ces trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral.

---

43. Soient D une droite de $\mathcal{P}$ et soient A et B deux points appartenant au même demi-plan ouvert limité par D. Déterminer le point M de D tel que $AM + BN$ soit minimal.

---

44. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le cercle :

$$(C) \begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{cases}$$

1) Déterminer le centre et le rayon de (C).
2) Déterminer l'intersection de (C) et des plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.
3) Quels sont les points $M : (x, y, z)$ vérifiant $x^3 + y^3 + z^3 = 9$.
4) Quelles sont les tangentes à (C) rencontrant la droite ($x = 0$ et $y = 0$).

---

45. Soient $T = (A, B, C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, $N = \frac{A+C}{2}$ et $P = \frac{A+B}{2}$. Montrer que (BN) et (CP) sont orthogonales si et seulement si $\|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 5\|\overrightarrow{BC}\|^2$.

---

46. Soient $T = (A, B, C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, H son orthocentre. Montrer que les symétriques de H par rapport à (BC), (CA) et (AB) se trouvent sur le cercle circonscrit à T.

---

47. **Droite de Simson :** Soient $T = (A, B, C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, $M \in \mathcal{P}$. Vérifier l'équivalence des conditions suivantes :

(i) Les projetés orthogonaux de M sur (BC), (CA) et (AB) sont alignés (ils définissent alors la droite de Simson de M).

(ii) M est sur le cercle circonscrit à T.

---

48. $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer l'équation du cercle circonscrit à $A = (3, 4)$, $B = (-3, 2)$, $C = (-5, -2)$. Quel est son centre et son rayon?

---

49. Soient A, B et C trois points distincts et alignés de E. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}\backslash(AB)$ tels que (MC) soit une bissectrice de (MA) et (MB).

---

50. Soient $T=(A,B,C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, $\alpha=\widehat{BAC}$, $\beta=\widehat{CBA}$ et $\gamma=\widehat{ACB}$.

1) Montrer que les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit à T dans la base affine (A,B,C) sont proportionnelles à $(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$.

2) Montrer que les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit à T dans la base affine (A,B,C) sont proportionnelles à $(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$.

3) Montrer que les coordonnées barycentriques de l'orthocentre T dans la base affine (A,B,C) sont proportionnelles à $(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$.

4) Montrer que les coordonnées barycentriques des centres des cercles exinscrit à T dans la base affine (A,B,C) sont proportionnelles à $(-\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$, $(\sin\alpha, -\sin\beta, \sin\gamma)$, $(\sin\alpha, \sin\beta, -\sin\gamma)$.

---

51. Montrer que toute boule de E est convexe.

---

52. **Caractérisation des triangles équilatéraux :** $\mathcal{P}$ est identifié à $\mathbb{C}$. Soit (a,b,c) un triangle de $\mathcal{P}$. Vérifier l'équivalence des conditions :

(i) (a,b,c) est équilatéral.

(ii) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$.

---

53. **Birapport :** Pour quatre points deux à deux distincts de $\mathcal{P}$ identifié à $\mathbb{C}$, A, B, C, D d'affixes respectives a, b, c et d, on définit le birapport par :

$$[a,b,c,d]=\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

1) Montrer que le birapport de quatre points est réels si, et seulement si, ces quatre points sont cocycliques ou alignés.

2) Soient A, B, M et M' distincts dans $\mathcal{P}$ d'affixes a, b, z, z'. On suppose que $[a,b,z,z']=-1$. On note I le milieu de A et B. Soient m et m' les affixes respectives de $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$. Exprimer mm' a l'aide de a et b. En déduire que (AB) est bissectrice de (IM) et (IM') et prouver :

$$IM.IM'=\frac{1}{4}AB^2$$

---

54. Soient O, A et B trois points distincts de $\mathcal{P}$ et u une similitude directe de centre O. On pose $A'=u(A)$ et $B'=u(B)$. Montrer qu'il existe une similitude directe v de centre O telle que $v(A)=B$ et $v(A')=B'$.

---

55. Soient (AB) et $(A'B')$ deux droites de $\mathcal{P}$ sécantes en S distincts des quatres points A, B, A' et B'. On note P le centre de la similitude directe u qui envoie A sur A' et B sur B'.

1) Montrer que S, P, A et A' sont cocycliques. De même avec S, P, B et B'.

2) En déduire une construction géométrique de P.

---

56. **Inversion de pôle Ω et de puissance λ :** Soient $\Omega\in\mathcal{P}$ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$. On appelle inversion de pôle Ω de puissance λ l'application :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathcal{P}\backslash\{\Omega\} & \longrightarrow & \mathcal{P}\\ M & \longmapsto & \Omega+\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2}\overrightarrow{\Omega M}\end{array}$$

1) Montrer que f est involutive et que pour tout M et N distincts de Ω :

$$\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|=\frac{|\lambda|}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|\|\overrightarrow{\Omega N}\|}\|\overrightarrow{MN}\|$$

2) Soit $A\subset\mathcal{P}\backslash\{\Omega\}$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) A est une droite affine.

(ii) $f(A)$ est un cercle contenant Ω, mais privé de Ω.

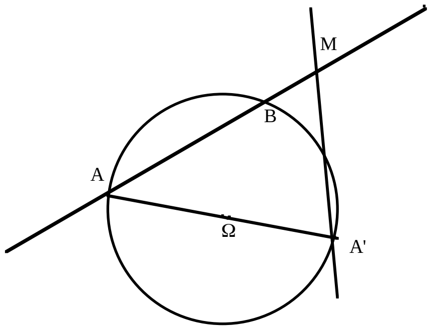
3) Soit C un cercle ne contenant pas Ω. Montrer que $f(C)$ est un cercle ne contenant pas Ω.

---

57. **Puissance d'un point par rapport à un cercle :** Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, supposé rapporté à un repère orthonormé, (C) un cercle de $\mathcal{P}$ de centre Ω et de rayon R.

1) Soit M un point de $\mathcal{P}$ en dehors du cercle. On considère une droite D passant par M qui coupe (C) en A et B distincts. On note A' le point de (C) diamétralement opposé à A. Montrer que :

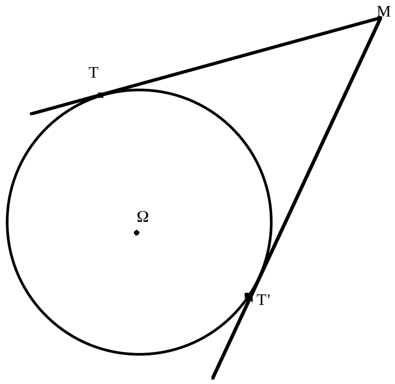
$$\overline{MA}.\overline{MB} = (\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MA'}) = \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - R^2$$



En déduire que le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ ne dépend pas de la sécante issue de M.

On appelle puissance de M par rapport à (C) le réel $P(M) = \overline{MA}.\overline{MB}$. Pour $M \in (C)$, on pose $P(M) = 0$.

2) Soit M un point en dehors de (C), T et T' les points de contact des tangentes à (C) issues de M. Montrer que $P(M) = \|\overrightarrow{MT}\|^2 = \|\overrightarrow{MT'}\|^2$.



3) On suppose (C) d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Montrer que la puissance de $M : (x, y)$ par rapport à (C) est :

$$P(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

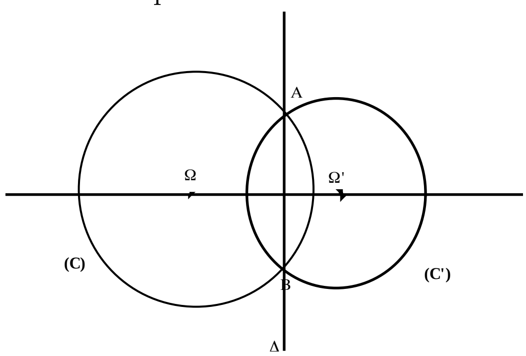
4) a. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4$ trois à trois non alignés et on suppose que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles et se coupent en M. Montrer que A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$.

b. Soient $(A, B, C) \in \mathcal{P}$, $M \in (AB)$. Montrer que le cercle circonscrit à (A, B, C) est tangent à (MC) si et seulement si $\overline{MA}.\overline{MB} = \|\overrightarrow{MC}\|^2$.

5) Soit (C') un autre cercle de rayon R', de centre Ω' différent de celui de (C) : (C) et (C') sont dits non-concentriques. On note P la puissance relative à (C) et P' celle relative à (C').

a. Montrer que l'ensemble des points M tels que $P(M) = P'(M)$ est une droite Δ, orthogonale à $(\Omega\Omega')$, appelée axe radical de (C) et (C').

b. On suppose (C) et (C') sécants en deux points distincts A et B. Montrer que $\Delta = (AB)$.



c. On suppose (C) et (C') tangents en A. Montrer que Δ est alors la tangente commune à (C) et (C') en A.

d. On suppose que $(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $(C') : x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$. Montrer que Δ a pour équation :

$$2(a' - a)x + 2(b' - b)y + (c - c') = 0$$

58. Soit A une partie convexe de E. Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

59. Soit A un ouvert de E. Montrer que l'enveloppe convexe de A est un ouvert de E.

60. 1) Soit $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Préciser $\mathring{\bar{A}}$ et $\overline{\mathring{A}}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$, $\lambda \in]0, 1[$, $(a, b) \in E^2$. On pose $x = (1-\lambda)a + \lambda b$. Montrer que, pour tout $\beta \in B(b, \frac{\lambda}{1-\lambda}\varepsilon/2)$ et tout $y \in B(x, (1-\lambda)\varepsilon/2)$, on a $\dfrac{y-(1-\lambda)\beta}{\lambda} \in B(a, \varepsilon)$.

3) Soit A une partie convexe de E. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathring{A} \times \bar{A}$, on a $]a, b[\subset \mathring{A}$.

4) Soit A une partie convexe de E telle que $\mathring{A} \neq \emptyset$. Montrer que :

$$\overline{\mathring{A}} = \overline{A} \quad \text{et} \quad \mathring{\bar{A}} = \mathring{A}$$

61. **Point fixe sur un compact convexe par une application affine :** Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, u affine, K un compact convexe non vide de E tel que $u(K) \subset K$. On choisit $a \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u^p(a)$.

1) Vérifier que pour tout $n > 0$, $a_n \in K$ et que $\lim_{n\to+\infty} u(a_n) - a_n = 0$.

2) Conclure que K contient un point invariant par u.

62. **Théorème de projection sur un convexe fermé :** On suppose E euclidien. Soient C un convexe fermé non vide de E, $a \in E$ et $d = d(a, C)$.

1) Etablir le lemme de la médiane : Dans $\mathcal{E}$ espace affine euclidien, on prend A, B et C trois points, I le milieu de B et C. Alors

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2\|\overrightarrow{AI}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|^2$$

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - a\| = d$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3) Vérifier l'existence d'un unique $h \in C$ tel que $\|h - a\| = d$.

4) Soit $x \in C$. En écrivant que, pour tout $y \in [h, x]$, $\|y - a\| \geqslant d$, montrer que $(h - a|h - x) \leqslant 0$. En déduire lorsque $a \notin C$, l'existence d'un demi-espace fermé contenant C sans contenir a.

63. Soit K un compact de E espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer grâce au théorème de Carathéodory (cf. exercice 31), que l'enveloppe convexe de K est compacte.

64. Soit C une partie fermée de E telle que pour tout $(a, b) \in C^2$, $\dfrac{a+b}{2} \in C$. Montrer que C est convexe.