HX3 2006/2007 - Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$

1. Pour $a \in [1, +\infty[$, simplifier $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

2. Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

3. Vérifier que pour des réels $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}_+$ on a $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$.

4. On considère une suite arithmétique $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$.

6. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que
1) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 1/2$;
2) $\sqrt[4]{313+x} + \sqrt[4]{313-x} = 6$.

7. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leqslant 1$. Montrer que l'on a:

$$|q\sqrt{2} - p| \geqslant \frac{1}{(1+2\sqrt{2})q}$$

8. Soient x_1, x_2,..., x_n dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i = n$$

Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i = 1$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Etablir :

$$x_1 + (1-x_1)x_2 + (1-x_1)(1-x_2)x_3 + \ldots + (1-x_1)\ldots(1-x_{n-1})x_n + (1-x_1)\ldots(1-x_n) = 1$$

2) Prouver :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k.k!}{n^k} C_n^k = n$$

10. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $a + b < 2 + a^2 + b^2$ et $a + b < (1+a^2)(1+b^2)$.

12. Soient $a_1 > 0$, $a_2 > 0$,..., $a_n > 0$. Montrer que :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

13. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$$

14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1, x_2,..., x_n dans $[0,1]$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \geqslant 1-\sum_{i=1}^{n} x_i$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n des réels tels que $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Etablir

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2) En déduire que si $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$, $(a+b+c)^n \leqslant 3^{n-1}(a^n+b^n+c^n)$.

16. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

17. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x)+n$. Montrer que $f : x \longmapsto \mathrm{E}(x)$ est croissante et $f \circ f = f$. Tracer le graphe de $x \longmapsto \mathrm{E}(x)$ et exprimer pour $x \in \mathbb{R}$, $d(x,\mathbb{Z}) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$.

18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = \mathrm{E}(x)$.

19. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la valuation p-adique de $n!$ est :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right)$$

20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x+\frac{k}{n}\right) = \mathrm{E}(nx)$ (considérer la division euclidienne de $\mathrm{E}(nx)$ par n).

21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

En déduire $\mathrm{E}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

22. Soit f un morphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ dans lui-même.

1) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = q$, et que f est croissante.
2) En déduire $f = I_{\mathbb{R}}$.

23. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R}\backslash H$ est dense dans $\mathbb{R}$.

24. Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques $E = \left\{\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

25. Soit E un ensemble dense de $\mathbb{R}$, F une partie finie de E. Montrer que $E-F$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

26. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a \leqslant b$.

1) Montrer que $\sup A \leqslant \inf B$.
2) Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) $\sup A = \inf B$
(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $b-a < \varepsilon$.
3) On suppose $A \cup B$ dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup A = \inf B$.

27. Soient A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A$.

28. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'élements de $\mathbb{R}_+^*$ possédant une borne supérieure (resp. inférieure) finie et non nulle.

Montrer que $\displaystyle\inf_{i\in I}\frac{1}{x_i} = \frac{1}{\sup_{i\in I} x_i}$ (resp. $\displaystyle\sup_{i\in I}\frac{1}{x_i} = \frac{1}{\inf_{i\in I} x_i}$)

29. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ deux familles de $\mathbb{R}$ possédant des bornes supérieures (resp. inférieures) finies.

1) Montrer que $\sup\limits_{(i,j)\in I\times J}(x_i+y_j)=\sup\limits_{i\in I}x_i+\sup\limits_{j\in J}y_j$ (resp. $\inf\limits_{(i,j)\in I\times J}(x_i+y_j)=\inf\limits_{i\in I}x_i+\inf\limits_{j\in J}y_j$).
2) On suppose que pour tout $(i,j)\in I\times J$, $x_i>0$ et $y_j>0$. Montrer que $\sup\limits_{(i,j)\in I\times J}x_iy_j=\sup\limits_{i\in I}x_i\sup\limits_{j\in J}y_j$ (resp. $\inf\limits_{(i,j)\in I\times J}x_iy_j=\inf\limits_{i\in I}x_i\inf\limits_{j\in J}y_j$).

---

30. Montrer que $\{r^3\in\mathbb{Q},\ r\in\mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

---

31. **Inégalité de la moyenne géométrique :**

1) Soient $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}_+$, $y\in\mathbb{R}_+$. Vérifier la formule suivante

$$x^n-nxy^{n-1}+(n-1)y^n=(x-y)^2\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)x^ky^{n-k-2}$$

2) Soient $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2$. Montrer que $\dfrac{\alpha+(n-1)\beta}{n}\geqslant\sqrt[n]{\alpha\beta^{n-1}}$.
3) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

---

32. Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que :

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n$$

---

33. Soit $(I_k)_{k\in K}$ une famille d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ telle que $\bigcap\limits_{k\in K}I_k\neq\emptyset$. Pour tout $k\in K$, on note $I_k=[a_k,b_k]$, $a_k\leqslant b_k$. On note a et b les extrémités de $\bigcap\limits_{k\in K}I_k$ (resp. $\bigcup\limits_{k\in K}I_k$), avec $a\leqslant b$. Montrer que $a=\sup_{k\in K}a_k$ et $b=\inf_{k\in K}b_k$ (resp. $a=\inf_{k\in K}a_k$ et $b=\sup_{k\in K}b_k$).

---

34. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalle de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n\cap I_{n+1}\neq\emptyset$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{k=0}^{n}I_k$ est un intervalle.
2) En déduire que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}I_n$ est un intervalle.

---

35. **Point fixe d'une fonction croissante** Soient $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ une fonction croissante et

$$F=\{x\in[0,1],\ \ f(x)\leqslant x\}$$

1) Montrer que $F\neq\emptyset$.
2) Montrer que si $x\in F$, $f(x)\in F$.
3) Etablir l'existence de $a\in F$ tel que $f(a)=a$ (considérer $\inf F$).

---

36. Quels sont les éléments d'ordre fini du groupe additif $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?