# HX3 2006/2007 - Topologie de $\mathbb{R}$. Limites

**1.** Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si seulement si tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $A$.

**2.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$. On suppose $A$ ouvert. Montrer que $A+B$ est ouvert.

**3.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

**4.** Soit $A$ une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\bar{A}$ est bornée.

**5.** Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, on appelle diamètre de $A$ $\delta(A) = \sup_{(a,b)\in A^2} |a-b|$. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.
1) Vérifier que $A$ est bornée si et seulement si $\delta(A) < +\infty$.
2) Montrer que si $A$ est bornée, $\delta(A) = \sup A - \inf A$.

**6.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
1) Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est fermé.
2) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle possède une unique valeur d'adhérence $l$. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.
3) Donner l'exemple d'une suite divergente réelle ne possédant qu'une seule valeur d'adhérence.

**7.** Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ non vide et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $d(x,A) = \inf_{a\in A} |x-a|$. Soient $A \subset \mathbb{R}$ non vide, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
1) Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement si $d(x,A) = 0$.
2) Montrer que $d(x,A) \leqslant |x-y| + d(y,A)$.
3) On suppose que $A$ est compact. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $|x-a| = d(x,A)$.

**8.** 1) Soit $A \subset \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \bigcup_{a\in A} ]a-1/n, a+1/n[$. Montrer que $\bar{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
2) Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ s'écrit comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts de $\mathbb{R}$.
3) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion croissante de fermés de $\mathbb{R}$.

**9.** Soit $A = \left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{l},\ k \in \mathbb{N}^*,\ l \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\bar{A}$. Même question avec $\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

**10.** **Points d'accumulation, points isolés :** Si $A$ désigne une partie de $\mathbb{R}$, on dit que $a \in \mathbb{R}$ est un *point d'accumulation de* $A$ si tout voisinage de $a$ contient un point de $A$ autre que $a$. On dit que $a \in A$ est un *point isolé de* $A$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $V \cap A = \{a\}$. $A$ est dite *discrète* si tous ses points sont isolés.
1) a. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geqslant 1}$ sont des parties discrètes de $\mathbb{R}$.
b. Montrer que 0 est un point d'accumulation de $\{\frac{1}{n}\}_{n\geqslant 1}$.
2) Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $A$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de $a$, $V \cap A$ est infini.
3) Soit $A \subset \mathbb{R}$. On note $A'$ l'ensemble des points d'accumulation de $A$ ($A'$ est appelé ensemble dérivé de $A$).
a. Montrer que $A'$ est fermé.
b. Montrer que $\overline{A} = A \cup A'$.
c. Montrer que $A$ est fermé si et seulement si $A' \subset A$.
4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ strictement croissante. Montrer que la partie $A$ constituée des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie de $\mathbb{R}$ dont tous les points sont isolés. Montrer que $A$ est fermé si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée.

**11.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties non vides compactes de $\mathbb{R}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ (considérer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$). Peut-on alléger les hypothèses sur les $A_n$?

**12.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$.
1) On suppose $A$ compact et $B$ fermé. Montrer que $A+B$ est fermé.
2) On suppose $A$ et $B$ compacts. Montrer que $A+B$ est compact.

**13.** Soit $I \subset \mathbb{R}$. On suppose $I$ à la fois ouvert et fermé. Montrer que $I = \emptyset$ ou $I = \mathbb{R}$.

**14.** **Structure des ouverts de $\mathbb{R}$ :** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Sur $\Omega$ on définit la relation binaire suivante : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $[x,y] \subset \Omega$.
1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $\omega$ une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$.

a. Montrer que $\omega$ est un intervalle ouvert.

b. Montrer que si $\omega'$ est un intervalle tel que $\omega \subset \omega' \subset \Omega$ alors $\omega = \omega'$.

3) Soit $E = \Omega/\mathcal{R}$. Montrer que l'on peut choisir dans chaque $\omega \in E$, $q_\omega \in \mathbb{Q}$. En considérant $f : \omega \in E \longmapsto q_\omega \in \mathbb{Q}$ prouver que $E$ est dénombrable.

4) Conclure que $\Omega$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

---

**15.** Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

---

**16.** En admettant que $\lim_{x\to 1} \sqrt[n]{x} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} x\mathrm{E}(1/x),\quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\mathrm{E}(1/x),\quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{E}(1/x)+x}{\mathrm{E}(1/x)-x},\quad \lim_{x\to +\infty} x\mathrm{E}(1/x),\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{E}(x)}{x},\quad \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right),\quad \lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1))$$

---

**17.** Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

---

**18.** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $f(xf(y)) = yf(x)$ et $\lim_{z\to +\infty} f(z) = 0$.

---

**19. Propriété de Borel-Lebesgue :**

1) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$ et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$$

a. On note $E$ l'ensemble des $x \in [a, b]$ tel qu'il existe $J_x \subset I$ fini avec $[a, x] \subset \bigcup_{i\in J_x} \Omega_i$. Montrer que $a \in E$, que $E$ est un intervalle, que $b \in E$.

b. En déduire qu'il existe $J \subset I$ fini tel que $[a, b] \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i$.

2) Soit $F \subset \mathbb{R}$.

a. On suppose $F$ est compacte. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $F \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. En introduisant $U = \mathbb{R}\backslash F$ et en utilisant la question précédente, prouver qu'il existe $J \subset I$ fini tel que

$$F \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i$$

b. Réciproquement, on suppose que pour toute famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $F \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $F \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i$. En considérant $(]-n, +n[)_{n\geqslant 1}$, prouver que $F$ est borné. Soit $a \in \bar{F}$. En considérant $(\mathbb{R}\backslash[a-1/n, a+1/n])_{n\geqslant 1}$, prouver que $a \in F$. En déduire que $F$ est compact.

---

**20. Critère de Cauchy fonctionnel :** Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f$ vérifie le critère de Cauchy fonctionnel en $a$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $V$ voisinage de $a$ tel que pour tout $(x, y) \in V \cap A$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) $f$ vérifie le critère de Cauchy fonctionnel en $a$ ;

(ii) $f$ admet une limite finie en $a$.

---

**21.** $*$ Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Etudier et comparer éventuellement

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

---

**22.** **Lemme de Lindelov :** 1) Montrer l'existence d'une famille dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout ouvert $\Omega$, il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\Omega = \bigcup_{n\in A} U_n$.

2) Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $J \subset I$ dénombrable tel que $\bigcup_{i\in I} \Omega_i = \bigcup_{i\in J} \Omega_i$.