HX3 2006/2007 - Coniques

$\mathcal{P}$ désigne un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé positif, ce qui permet une identification à $\mathbb{R}^2$.

---

1. Trouver l'équation réduite des coniques suivantes :

1) l'ellipse de foyer $(\pm 1, 0)$, d'excentricité $e = 1/2$.
2) l'hyperbole de directrices $x = \pm 3$, d'excentricité 2.

---

2. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des coniques d'équation :

1) $x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0$;
2) $y^2 + 3x - 4y = 2$;
3) $x^2 + \sqrt{3}xy + x = 2$;
4) $y^2 + 2y + x = 0$;
5) $4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 12 = 0$;
6) $x^2 - y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$;
7) $xy + x - y = 0$.

---

3. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques de même directrice D et de foyers respectifs F et F' distincts, d'excentricités respectives $e \neq e'$. Démontrer que les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont cocycliques.

---

4. 1) Déterminer l'ensemble des points F, foyers d'une conique de directrice (Ox) passant par $A(-1, 2)$ et $B(1, 1)$.

2) Préciser suivant la position de F sur cet ensemble, la nature de cette conique.

---

5. Soit $A \neq B$, de milieu I. Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifiant $MI^2 = MA.MB$.

---

6. Déterminer l'ensemble des points d'où on peut mener deux tangentes orthogonales à une ellipse donnée.

---

7. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Une droite Δ varie en gardant une direction fixe et rencontre $\mathcal{E}$ en P et Q. Préciser l'ensemble décrit par le milieu de $[PQ]$.

---

8. 1) La tangente en M à une hyperbole $\mathcal{H}$ coupe les asymptotes en P et Q. Montrer que M est le milieu de P et Q.

2) En déduire une construction de la tangente à $\mathcal{H}$ en M.