HX3 2006/2007 - Différentielles

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

---

1. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme euclidienne. Montrer que l'application $x \longmapsto \|x\|^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Qu'en est-il de $x \longmapsto \|x\|$?

---

2. Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, étudier la continuité de f et la continuité des dérivées partielles premières de f :

1) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ si } (x,y) = 0 \end{cases}$

2) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \ln(x^2+y^2) \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ si } (x,y) = 0 \end{cases}$

3) $f(x,y) = |x-y|$.

---

3. Etudier et simplifier la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \arccos \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}} \end{array}$$

---

4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^y (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer les dérivées partielles premières.

---

5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ \varphi'(x) \text{ si } x = y \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

6. On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure canonique d'espace euclidien et on considère :

$$f : \begin{array}{ccc} E\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Préciser $\overrightarrow{\text{grad}} f$.

---

7. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure canonique d'espace euclidien orienté et on note (e_1, e_2) la base canonique. On considère $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_-e_1 \longmapsto \theta = \arg(x+iy) \in]-\pi,\pi[$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et préciser $\overrightarrow{\text{grad}} f$.

---

8. Différentielle de l'inversion : On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure canonique d'espace euclidien. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E\backslash\{0\}$, on pose $f(x) = \frac{\lambda x}{\|x\|^2}$. Montrer que f est une permutation involutive de $E\backslash\{0\}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $x \in E\backslash\{0\}$, on note s la symétrie orthogonale par rapport à $x^\perp$. Montrer que

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\lambda}{\|x\|^2} s$$

---

9. Généralisation du théorème de Rolle : Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ contenant U, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue sur K, dérivable sur U et constante sur $K\backslash U$. Montrer que f atteint l'une au moins de ses bornes sur K en un point c de U et qu'alors $\mathrm{d}f(c) = 0$.

---

10. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \det M \in \mathbb{R}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $(M,H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a :

$$\mathrm{d}f(M)(H) = \mathrm{Tr}(CH)$$

où C est la transposée de la comatrice de M. En déduire que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f(M)(H) = \det M \operatorname{Tr}(M^{-1}H)$.

---

11. Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et préciser sa différentielle en I_n, puis en M_0 inversible.

---

12. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ si } (x,y) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$.

2) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

---

13. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

1) pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$ où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$;

2) pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$ où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

---

14. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant 1) pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$;

2) pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

---

15. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^2$. On définit $y : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longmapsto f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$. Trouver f tel que le laplacien de y est nul, i.e.

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0$$

---

16. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ vérifie

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

---

17. **Expression du gradient en coordonnées polaires :** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On écrit pour $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \rho \overrightarrow{U}(\theta)$, $F(\rho,\theta) = f(x,y)$. Démontrer que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial F}{\partial \rho} \overrightarrow{U}(\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \overrightarrow{V}(\theta).$$

---

18. **Expression du Laplacien en coordonnées polaires :** Soit $z : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^2$ et on pose $Z(\rho,\theta) = z(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Montrer que :

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho}$$

---

19. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant les coordonnées polaires :

1) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

2) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$

---

20. 1) Montrer que $(x,y) \longmapsto (u,v) = (xy, x+y)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ sur $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, v^2 > 4u\}$.

2) Déterminer les fonctions dérivables z de $(x,y) \in U$ telles que

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + 3(x-y)z = 0$$

---

21. 1) Vérifier que $(u,v) \longmapsto (x,y) = (\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v})$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ sur $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2) Trouver toutes les fonctions dérivables z de $(x,y) \in V$ telles que

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - y(1+y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

---

22. Déterminer un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ tel que $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x^2 - y - z, 2x + y + z, x + y - z)$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

---

23. Exprimer les extrema locaux et globaux de :

1) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.
2) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2y + \ln(1+y^2)$.
3) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 + y^3$.
4) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$.
5) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{x\cos y}$.
6) $f : (x,y) \in [-1,1]^2 \longmapsto x^2 + y^2 + \sin(x^2+y^2)$.

---

24. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{(1+x)(1+y)(1+z)} \end{array}.$$

Montrer que f admet un unique extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et que celui-ci est un maximum global.

---

25. Soit $k > 0$. Déterminer

$$\sup_{x+y+z=k,(x,y,z)\in\mathbb{R}_+^3} xyz$$

---

26. On pose $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta y^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

---

27. On pose $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leqslant x \leqslant a \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta xye^{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

---

28. On pose $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x, 0 \leqslant y \text{ et } x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta \frac{y}{x^2+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

---

29. On pose Δ la partie délimité par les paraboles $y = x^2$ et $x = y^2$. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

---

30. On pose $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$. Calculer $I = \displaystyle\iiint_\Delta (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

---

31. On pose $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1\}$. Calculer $I = \displaystyle\iiint_\Delta z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

---

32. Calculer $\displaystyle\iint_{x,y\geqslant 0, x+y\leqslant 1} \ln(1+x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\iint_{y\geqslant 0, x^2+y^2-2x\leqslant 0} x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

---

33. Calculer l'aire d'une ellipse en fonction de a et b, demi-grand axe et demi-petit axe.