HX3 2006/2007 - Fractions rationnelles

1. 1) Soit K un corps infini, $F \in K(X)$. Démontrer que F n'a qu'un nombre fini de pôles. On suppose que pour $x \in K$ non pôle de F, $F(x) = 0$. Montrer que $F = 0$.

2) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Etudier la liberté de la famille de fonctions

$$\left(x \longmapsto \frac{1}{x^2 + n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

---

2. **Polynômes de Tchebychev :**

1) Vérifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un unique $P_n \in \mathbb{C}[X]$ (P_n est le n-ième polynôme de Tchebychev) tel que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

et montrer que pour tout $n \geqslant 1$, P_n est unitaire, de degré n, à coefficients entiers et si $n \geqslant 2$:

$$P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. déterminer tous les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$. En déduire la décomposition de P_n en facteurs irréductibles.

3) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ tel que $F\left(\frac{1}{X}\right) = F(X)$. Vérifier l'existence de $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $G\left(X + \frac{1}{X}\right) = F$.

4) a. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $a_{2n} \neq 0$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $a_k = a_{2n-k}$ (on dit que P est un polynôme réciproque). Vérifier l'existence d'un unique $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = X^n Q\left(X + \frac{1}{X}\right)$, et montrer que $\deg Q = n$ (écrire Q comme combinaison linéaire de P_0, P_1,..., P_n).

b. Déterminer les racines complexes de $X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X + 1$.

---

3. Décomposer en élements simples sur K les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 8X - 1}{(X-1)^3(X-2)}; \quad \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}; \quad \frac{Q'}{Q} \text{ avec } Q = \lambda \prod_{p \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$$

---

4. Décomposer en élements simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X^3 - 1}; \quad \frac{1}{(X^3 - 1)^2}; \quad \frac{1}{X^n - 1}$$

---

5. Décomposer en élements simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(X^2+1)(X^2-1)}; \quad \frac{X^5 + 2}{(X^2 + X + 1)^2}; \quad \frac{X}{X^4 + X^2 + 1}; \quad \frac{1}{(X+1)(X^4+1)}; \quad \frac{1}{X^n - 1}$$

---

6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, $\deg P \geqslant 1$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples α_1, α_2,..., α_n. On suppose $P(0) \neq 0$. Etablir :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i P'(\alpha_i)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(\alpha_i)}$?

---

7. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire, $\deg P \geqslant 1$ à racines simples α_1, α_2,..., α_n. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{P^2}$.

---

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair et $z_1, \dots, z_{n-1}$ les racines n-ième de l'unité autres que 1. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-z_k}{1+z_k}$.

---

9. Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique infinie, $F \in K(X)$, décomposée en éléments simples :

$$F = \sum_{\substack{\alpha \in K \\ n \in \mathbb{N}^*}} \frac{\lambda_{n\alpha}}{(X-\alpha)^n}$$

Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :

(i) Il existe $G \in K(X)$ tel que $F = G'$.

(ii) Pour tout $\alpha \in K$, $\lambda_{1\alpha} = 0$.

---

10. **Formules de Newton :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$. On pose pour tout $k \in \{1, \dots n\}$ et $l \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_k = \sum_{\mathrm{Card} I = k} \prod_{i \in I} \alpha_i \quad \text{et} \quad N_l = \sum_{i=1}^n \alpha_i^l = \alpha_1^l + \alpha_2^l + \ldots + \alpha_n^l$$

Enfin, on pose $P = \displaystyle\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$.

1) Exprimer en fonction des σ_k :

$$P, \quad A = X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{C}[X] \quad \text{et} \quad B = X^{n-1} P'\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{C}[X]$$

Exprimer ces mêmes polynômes en fonction des α_i.

2) A partir de la relation $P(\alpha_i) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, montrer que si $p \geqslant n$:

$$N_p - \sigma_1 N_{p-1} + \ldots + (-1)^j \sigma_j N_{p-j} + \ldots + (-1)^n \sigma_n N_{p-n} = 0$$

3) a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer :

$$\frac{1 - \lambda^{n+1} X^{n+1}}{1 - \lambda X}, \quad \text{et en déduire que, modulo } X^{n+1} :$$

$$\prod_{k=1}^n (1 - \alpha_k X) \left(\sum_{k=0}^n N_k X^k\right) \equiv \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq k}} (1 - \alpha_l X)$$

b. En déduire que si $p \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$N_p - \sigma_1 N_{p-1} + \ldots + (-1)^j \sigma_j N_{p-j} + \ldots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} N_1 + (-1)^p p \sigma_p = 0$$

---

11. On supposera connus les résultats de l'exercice précédent.

1) Soients $P = \displaystyle\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \in \mathbb{C}[X]$ et $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^n (X - \beta_k) \in \mathbb{C}[X]$. On définit pour tout $l \in \mathbb{N}^*$:

$$N_l = \sum_{k=1}^n \alpha_k^l \quad \text{et} \quad N'_p = \sum_{k=1}^n \beta_k^l$$

On suppose que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $N_k = N'_k$. Prouver alors que, à permutation près, P et Q ont les mêmes racines distinctes ou confondues.

2) Soients $n \in \mathbb{N}$ et $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$P(z_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(z_k)$$

Montrer que z_1, z_2, ..., z_n sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés ayant pour centre z_0 (on commencera par se ramener à $z_0 = 0$).

---

12. **Division suivant les puissances croissantes :** 1) Soient $(A, B) \in K[X]$ tel que $B(0) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

a. On pose $a = A(0)$ et $b = B(0)$. Montrer que $A - \frac{a}{b}B$ est divisible par X.

b. Etablir l'existence d'un unique couple $(Q, R) \in K[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + X^{n+1}R \quad \text{et} \quad \deg Q \leqslant n$$

Q (resp. $X^{n+1}R$) est alors appelé quotient (resp. reste) de la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n.

c. Décrire un algorithme permettant le calcul de Q et R. Appliquer à $A = 1 + X$ et $B = 1 + X + X^2$.

2) Soient $\alpha \in K$, $(A, B) \in K[X]^2$ avec $B(\alpha) \neq 0$ et

$$F = \frac{A}{(X - \alpha)^n B}$$

Montrer que si le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $A(X + \alpha)$ et $B(X + \alpha)$ à l'ordre $n - 1$ est $a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$, alors :

$$\frac{a_0}{(X - \alpha)^n} + \frac{a_1}{(X - \alpha)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(X - \alpha)}$$

est la partie relative à α dans la décomposition en éléments simples de F.

3) Décomposer en éléments simples la fraction :

$$F = \frac{1}{(X - 1)^3(X^2 + 1)} \in \mathbb{R}[X]$$

13. On suppose connus les résultats de l'exercice précédent. Soient A une K-algèbre, $\alpha \in A$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n = 0$.

1) Soit $Q \in K[X]$. Montrer que $Q(\alpha)$ est inversible si et seulement si $Q(0) \neq 0$.
2) Soit $(P,Q) \in K[X]^2$ tel que $Q(0) \neq 0$. Montrer que

$$P(\alpha)Q(\alpha)^{-1} = Q(\alpha)^{-1}P(\alpha) = D(\alpha)$$

où D est le quotient à l'ordre $n-1$ de la division suivant les puissances croissantes de P par Q.

---

14. **Formule de Taylor :** On suppose connus les résultats de l'exercice 10. Soient $\alpha \in K$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments de $K(X)$ qui sont définis en α, $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, $F \in \mathcal{A}$.

1) Vérifier l'existence d'un unique $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ et $G \in \mathcal{A}$ tels que

$$F = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-\alpha)^k + (X-\alpha)^{n+1} G$$

C'est le développement limité de F à l'ordre n.

2) On écrit $F = \frac{A}{B}$ avec $(A,B) \in K[X]^2$ et $B(\alpha) \neq 0$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ est le quotient à l'ordre n de la division suivant les puissances croissantes de $A(X+\alpha)$ par $B(X+\alpha)$.
3) On suppose K de caractéristique infinie. Montrer que

$$\lambda_k = \frac{F^{(k)}(\alpha)}{k!}$$

Le développement limité est aussi appelé formule de Taylor.

---

15. **Le monoïde $(K(X) \backslash K)$:** 1) Soient $P \in K[X]$ tel que $P(0) \neq 0$, et $F \in K(X)$ telle que $P(F) = 0$. Montrer que $F \in K$.

2) Soient $P \in K[X]$, $P \neq 0$ et $F \in K(X) \backslash K$. Montrer que $P(F) \neq 0$ (se ramener au cas où $P(0) \neq 0$).
3) Soit $(F,G) \in (K(X) \backslash K)^2$. Montrer que $F \circ G$ existe et appartient à $K(X) \backslash K$.
4) Conclure que $(K(X) \backslash K, \circ)$ est un monoïde.

---

16. **Le groupe des homographies :** On note

$$\mathcal{H} = \left\{ \frac{aX+b}{cX+d} \in K(X), \quad ad - bc \neq 0 \right\}$$

On supposera connus les résultats de l'exercice précédent.

1) Soit $F \in \mathcal{H}$. Montrer que F est inversible dans $(K(X) \backslash K, \circ)$, et calculer son inverse.
2) Soit $(F,G) \in K(X)^2$ tel que $F \circ G = X$. Montrer que $F \in \mathcal{H}$ et $G \in \mathcal{H}$.
3) Soit $F \in K(X) \backslash K$. Vérifier l'équivalence des trois conditions suivantes :
(i) F inversible à gauche dans $(K(X) \backslash K, \circ)$.
(ii) F inversible à droite dans $(K(X) \backslash K, \circ)$.
(iii) $F \in \mathcal{H}$.
4) Montrer que $(K(X) \backslash K, \circ)$. est un groupe et que l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(K) & \longrightarrow & K(X) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{aX+b}{cX+d} \end{array}$$

est un morphisme de groupes, d'image $\mathcal{H}$, de noyau $K^* I_2$. En déduire

$$\mathcal{H} \simeq \mathrm{GL}_2(K)/K^* I_2 = \mathrm{PGL}_2(K)$$

---

17. **Automorphismes de la K-algèbre $K(X)$:** On supposera connus les résultats de l'exercice précédent. Montrer que les automorphismes de la K-algèbre $K(X)$ sont les applications de la forme :

$$F \longmapsto F\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

où $(a,b,c,d) \in K^4$ et $ad - bc \neq 0$.

18. Soit $(a,b,c,d) \in K^4$ tel que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On pose $F = \dfrac{aX+b}{cX+d} \in K(X)$.

1) Ecrire l'équation fournissant les points fixes de F (i.e les $\alpha \in K$ tel que $F(\alpha) = \alpha$).

2) On suppose que F possède deux points fixes distincts α et β. Vérifier l'existence de $k \in K$, $k \neq 0$, $k \neq 1$ tel que

$$\frac{F-\beta}{F-\alpha} = k\frac{X-\beta}{X-\alpha}$$

3) On suppose que F possède un unique point fixe α. Vérifier l'existence de $h \in K^*$ tel que

$$\frac{1}{F-\alpha} = h + \frac{1}{X-\alpha}$$

4) Déterminer les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 2};\;\; x_{n+1} = \frac{5x_n - 4}{2x_n - 1};\;\; x_{n+1} = \frac{x_n - 4}{x_n - 3}$$

---

19. **Développement P-adique d'une fraction rationnelle :** Soit P un polynôme irréductible de $K[X]$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments de $K(X)$ qui s'écrivent (d'une manière au moins) $\frac{A}{B}$ avec $(A,B) \in K[X]^2$ et $B \notin PK[X]$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $K(X)$ contenant $K[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que tout éléments F de $\mathcal{A}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$R_0 + R_1 P + \ldots + R_n P^n + G P^{n+1}$$

où $G \in \mathcal{A}$, $(R_0, R_1, \ldots, R_n) \in K[X]^{n+1}$, $\deg R_k < \deg P$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$; c'est le développement P-adique de F à l'ordre n.

---

20. Soit $F \in K(X)^*$. Montrer que $\deg F' \leqslant \begin{cases} \deg F - 1 \text{ si } \deg F \neq 0 \\ \deg F - 2 \text{ si } \deg F = 0 \end{cases}$ et que, si K est de caractéristique infinie et si $\deg F \neq 0$, alors on a $\deg F' = \deg F - 1$. Peut-il exister $G \in K(X)$ tel que $G' = F$ lorsque $\deg F = -1$?

---

21. Soit $F \in K(X)$ (K de caractéristique infinie) écrite sous forme réduite :

$$F = \frac{A}{\prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}}$$

où P_i est irréductible unitaire, $\alpha_i \geqslant 1$ pour tout i, $A \in K[X]$. Montrer que toute forme réduite de F' est de la forme

$$\frac{B}{\prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i+1}} \quad \text{où } B \in K[X]$$

---

22. On supposera connus les résultats de l'exercice précédent. Soit L un surcorps commutatif de K (K de caractéristique infinie), $F \in L(X)$. On suppose que $F' \in K(X)$ et qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $F(\alpha)$ existe et appartienne à K. On écrit F sous forme réduite $F = \dfrac{A}{B}$ avec B unitaire.

1) Montrer que $B \in K[X]$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{(n)}(\alpha) \in K$. En conclure que $A \in K[X]$ et que $F \in K(X)$.