HX3 2006/2007 - Eléments de théorie des ensembles

1. $*$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire à l'aide de symboles logiques les assertions suivantes :
1) Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit supérieur à 2.
2) Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit supérieur à 2.
3) Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit différent de 1.

Pour quelles valeurs de x ces assertions sont-elles vraies?

---

2. $*$ Soient x et y des réels. Ecrire les négations des assertions suivantes :
1) $A:\ 0 < x \leqslant 1;$
2) $B:\ xy = 0;$
3) $C:\ x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1;$

---

3. Soient E un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ des assertions de l'élément $x \in E$. Les équivalences sont-elles vraies?
1) $[(\forall x \in E)\ (P(x) \text{ et } Q(x))] \Longleftrightarrow [(\forall x \in E\ P(x)) \text{ et } (\forall x \in E\ Q(x))];$
2) $[(\exists x \in E)\ (P(x) \text{ et } Q(x))] \Longleftrightarrow [(\exists x \in E\ P(x)) \text{ et } (\exists x \in E\ Q(x))];$
3) $[(\forall x \in E)\ (P(x) \text{ ou } Q(x))] \Longleftrightarrow [(\forall x \in E\ P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E\ Q(x))];$
4) $[(\exists x \in E)\ (P(x) \text{ ou } Q(x))] \Longleftrightarrow [(\exists x \in E\ P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E\ Q(x))].$

---

4. $*$ Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle. Ecrire à l'aide de symboles mathématiques les phrases suivantes ainsi que leur négation :
1) f n'est pas de signe constant sur I.
2) f est majorée sur I.

---

5. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Simplifier les expressions suivantes (si $F \subset E$, $\bar{F}$ désignera le complémentaire de F dans E):
1) $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B});$
2) $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C);$

---

6. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.
1) Montrer que $(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Longrightarrow (B \subset C)$
2) Montrer que $(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \Longrightarrow (B = C)$
3) Montrer que $(A \cup B = A \cap B) \Longleftrightarrow (A = B)$

---

7. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes :

$$(E_1)\ \ X \cup A = B; \quad (E_2)\ \ X \cap A = B; \quad (E_3)\ \ X - A = B.$$

---

8. Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Résoudre l'équation : $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = \emptyset$ ($\bar{X}$ désignant le complémentaire de X dans E).

---

9. Soit E un ensemble. Pour tout $A \subset E$, on appelle fonction caractéristique de A (dans E) la fonction $\varphi_A : E \longrightarrow E$ qui à x dans E associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon.
1) Montrer que $\varphi_A = \varphi_A^2$, $A \subset B \iff \varphi_A \leqslant \varphi_B$, puis $A = B \iff \varphi_A = \varphi_B$.
2) Exprimer pour A et B parties de E, $\varphi_{A\cap B}$, $\varphi_{A\cup B}$, $\varphi_{\bar{A}}$ où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E.

---

10. Soient A et B des parties d'un ensemble E, $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow F$. A quelle condition existe t-il $h : A \cup B \longrightarrow F$ telle que $h_{|A} = f$ et $h_{|B} = g$?

---

11. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$, $B \subset F$. Montrer que $f(A \cap f^{<-1>}(B)) = f(A) \cap B$.

---

12. Soit $f : n \in \mathbb{N} \longmapsto 2n \in \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à n dans $\mathbb{N}$; associe $n/2$ si n est pair et $(n-1)/2$ si n est impair.
1) Etudier la surjectivité et l'injectivité de f et de g.
2) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

---

13. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, E étant supposé non vide.
1) Vérifier l'équivalence des deux propositions suivantes

(i) f injective ;

(ii) Il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $g \circ f = I_E$

2) Vérifier l'équivalence des deux propositions suivantes
(iii) f surjective ;
(iv) Il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = I_F$.

---

14. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et G un ensemble. On suppose que E et G ont chacun au moins deux éléments.
1) Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :
(i) f surjective ;
(ii) Pour tout couple (g, h) de $\mathcal{F}(F, G)$

$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$$

2) Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :
(iii) f injective ;
(iv) Pour tout couple (g, h) de $\mathcal{F}(G, E)$

$$f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$$

---

15. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
1) Montrer que : f injective $\Longleftrightarrow (\forall E' \subset E)(\ f^{<-1>}(f(E')) = E'\ )$
2) Montrer que : f surjective $\Longleftrightarrow (\forall F' \subset F)(\ f(f^{<-1>}(F')) = F'\ )$

---

16. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
1) Soient $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de F et $B \subset F$. Vérifier les égalités suivantes :
a. $f^{<-1>}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{<-1>}(B_i)$;
b. $f^{<-1>}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{<-1>}(B_i)$;
c. $\complement_E f^{<-1>}(B) = f^{<-1>}(\complement_F B)$.
2) Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $A \subset E$. Vérifier les égalités suivantes :
a. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;
b. si f est injective et I non vide, $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;
c. si f est bijective $\complement_F f(A) = f(\complement_E A)$.

---

17. **Théorème de Cantor :** Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. Montrer que si $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$, $A \notin \operatorname{im} f$. En conclure qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

---

18. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

Vérifier dans quel cas f est injective, surjective ou bijective. Dans le cas où f est bijective, on exhibera f^{-1}.

---

19. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, il en va de même pour f, g et h.

---

20. **Lemmes de factorisation :** Soient E, F et G trois ensembles.
1) Soit $f : E \longrightarrow F$, $g : E \longrightarrow G$. Montrer qu'il existe $h : F \longrightarrow G$ telle que $g = h \circ f$ si, et seulement si

$$\forall (x, x') \in E^2,\ \ f(x) = f(x') \implies g(x) = g(x').$$

2) Soit $g : E \longrightarrow G$ et $h : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe $f : E \longrightarrow F$ telle que $h \circ f = g$ si, et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ g(x) = h(y).$$

21. Soit $(X_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble E.

1) Comparer $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} X_{ij}$ et $\bigcup\limits_{j\in J}\bigcap\limits_{i\in I} X_{ij}$.

2) Montrer que

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} X_{ij} = \bigcup_{f:I\longrightarrow J}\bigcap_{i\in I} X_{if(i)}$$

---

22. Soit E un ensemble et A_0, A_1,..., A_n des parties de E telles que

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = E.$$

Montrer que $(A_k - A_{k-1})_{1\leqslant k\leqslant n}$ forme une partition de E.

---

23. Soit $f : E \longrightarrow F$, $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence sur F. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par "$x\mathcal{R}y$ si, et seulement si $f(x)\mathcal{S}f(y)$". Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

---

24. Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y$ si pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\{x, y\} \subset A \text{ ou } \{x, y\} \subset \complement_E A$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalences.

---

25. $*$ On définit ainsi la relation $\mathcal{R}$: pour x et y réels, $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si $(x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in \mathbb{R}$, préciser le cardinal de la classe d'équivalence de x.

---

26. Soient X un ensemble et $F \subset X$, $G \subset X$. On munit $\mathcal{P}(X)$ de l'ordre de l'inclusion. Que dire de $\max(F, G)$, $\sup(F, G)$, $\min(F, G)$, $\inf(F, G)$?

---

27. On définit sur $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ la relation $\sim$ de la manière suivante : si f et g sont dans E alors

$$f \sim g \iff (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (f(n) = g(n))$$

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Pour ω et ω' deux classes d'équivalences de $E/\sim$. On dira que $\omega \leqslant \omega'$ s'il existe $f \in \omega$ et $f' \in \omega'$ tels que $f \leqslant f'$.

2) Soit $f, f' \in E$. On note ω (resp. ω') la classe de g (resp. g'). Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

(i) $\omega \leqslant \omega'$;

(ii) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $g(n) \leqslant g'(n)$.

3) Montrer que $(E/\sim, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.

4) L'ordre est-il total ? On justifera la réponse.

---

28. Soient E un ensemble totalement ordonné, $a \in E$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E possédant une borne supérieure. Montrer l'égalité

$$\inf(a, \sup_{i\in I} x_i) = \sup_{i\in I} \inf(a, x_i)$$

Que peut-on énoncer si les x_i admettent une borne inférieure?

---

29. Soient E et F deux ensembles ordonnés, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$. On suppose que f et g sont décroissantes et que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $g \circ f(x) \geqslant x$ et $f \circ g(y) \geqslant y$.

1) Montrer que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

2) Montrer qu'en posant, pour tout $x \in \operatorname{im} g$ et tout $y \in \operatorname{im} f$, $f'(x) = f(x)$ et $g'(y) = g(y)$, on définit deux bijections décroissantes, f' allant de $\operatorname{im} g$ sur $\operatorname{im} f$ et g' allant de $\operatorname{im} f$ sur $\operatorname{im} g$, et que ces deux bijections sont réciproques l'une de l'autre.

---

30. Soit E un ensemble totalement ordonné. Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :

(i) Toute partie non vide de E possède un plus grand élément.

(ii) Toute suite croissante de E est stationnaire (i.e constante à partir d'un certain rang).

(iii) Il n'existe aucune suite strictement croissante de E.
Quelle condition équivalente peut-on trouver à "Toute partie non vide de E admet un plus petit élément"?

---

31. Soient E un ensemble non vide. On considère sur $\mathcal{P}(E)$ l'ordre induit par l'inclusion. Soit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante. On note $\mathcal{Q}(E) = \{X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) \subset X\}$.

1) Montrer que si $X \in \mathcal{Q}(E)$, $f(X) \in \mathcal{Q}(E)$.
2) Montrer que si $X_0 = \bigcap_{X \in \mathcal{Q}(E)} X$, alors $f(X_0) = X_0$.

---

32. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

---

33. Soient $x \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si p divise $x^2 - x$, p divise aussi $x^n - x$.

---

34. Montrer que pour tout m, n, r entiers positifs ou nuls $m + n$ divise $m^{2r+1} + n^{2r+1}$.

---

35. $*$ Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ est le quotient d'un nombre impair et d'un nombre pair (procéder par récurrence).

---

36. $*$ Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{-1}{1+u_n}$.

---

37. On suppose $\mathbb{N}$ construit et on désire construire rigoureusement et efficacement $\mathbb{Z}$, son ordre et ses opérations $+$ et $\times$. Imaginer une telle construction.

---

38. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1!3!\ldots(2n+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}$$

---

39. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n+1) > f(f(n))$$

1) En considérant $\inf_{k\geqslant 0} f(k)$, prouver que pour tout $k > 0$, $f(k) > f(0)$.
2) En considérant $\inf_{k\geqslant 1} f(k)$, prouver que

$$f(0) = 0 \text{ et pour tout } k > 1,\ \ f(k) > f(1) \geqslant 1$$

3) En s'inspirant de la question précédente, à l'aide d'une récurrence dont on formulera clairement l'hypothèse, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

---

40. **Bijection canonique :** on se donne $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère la relation binaire $\mathcal{R}_f$ définie par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ x\,\mathcal{R}_f\,y \iff f(x) = f(y).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence.
2) On considère $\dot{f} : \dot{x} \in E/\mathcal{R}_f \longrightarrow f(x) \in \operatorname{im} f$.
 a. Montrer que $\dot{f}$ est bien définie.
 b. Montrer que $\dot{f}$ est une bijection : l'application $\dot{f}$ est appelée bijection canoniquement associée à f.
 c. On note $s : x \in E \longmapsto \dot{x} \in E/\mathcal{R}_f$ la surjection canonique de E sur $E/\mathcal{R}_f$, $i : y \in \operatorname{im} f \longmapsto y \in F$ l'injection canonique de $\operatorname{im} f$ dans F. Exprimer f en fonction de $\dot{f}$, s et i.