HX3 2006/2007 - Variations des fonctions à variable réelle

1. Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f admette une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) On suppose f dérivable et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?
2) On suppose f dérivable et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?
3) Soit $\alpha > 0$. On suppose $f' \geqslant \alpha$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
4) On suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l > 0$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
5) On suppose f dérivable et $f'(1) > 0$. Peut-on dire que f est croissante au voisinage de 1?
6) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(1) > 0$. Peut-on dire que f est croissante au voisinage de 1?

4. Vérifier que, pour tout $x > 0$, on a $\arctan x > \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

5. 1) Montrer que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $2x < \sin 2x + \tan x$.

2) Montrer que si $x > 0$:

$$\arctan x > \frac{3x}{1 + 2\sqrt{1+x^2}}$$

3) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

4) Montrer que si $x > 0$ et $x \neq 1$:

$$\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

6. 1) Soient $0 \leqslant a \leqslant b$. Montrer que

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leqslant \arctan b - \arctan a \leqslant \frac{b-a}{1+a^2}$$

2) Soient $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Montrer que

$$\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}$$

7. 1) Vérifier que pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.

2) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la limite de

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

8. **Théorème de Darboux :** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f'(a)f'b) < 0$. Montrer que l'une au moins des deux bornes de f sur $[a, b]$ est atteinte en un point $c \in]a, b[$. Que vaut $f'(c)$?

2) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

9. Soient $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ si $x \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$\alpha \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

---

10. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

---

11. Construire une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable non lipschitzienne.

---

12. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ et $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in I^2$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant K|x-y|^\alpha$$

Montrer que f est constante.

---

13. Soit $f : x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

1) Démontrer que f se prolonge par continuit é en 0.
2) En déduire que f est bornée.
3) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

---

14. 1) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

2) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \frac{\tan x - x}{x^3}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

---

15. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2) De quelle forme est la dérivée n-ième de f sur $\mathbb{R}_+^*$?
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

---

16. 1) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2) En déduire la limite de $\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

---

17. 1) Calculer les dérivées de $f : x \longmapsto \arctan \frac{1}{2x^2}$ et $g : x \longmapsto \arctan \frac{x}{1+x} - \arctan \frac{x-1}{x}$. Qu'en conclure?

2) Montrer que les applications

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan x \quad \text{et} \quad g : x \in]-1,1] \longmapsto 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x$$

sont constantes

---

18. Etudier les variations de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x - x^2 - x$ et de $g : x > 0 \longmapsto (x\ln x)^2 - x(\ln x + 1) + 1$.

---

19. Etudier les fonctions suivantes dont on précisera le domaine de définition :

1) $x \longmapsto \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;
2) $x \longmapsto (x-1)^2 \arctan \frac{1}{x}$;
3) $x \longmapsto \cos^3 x + \sin^3 x$.

---

20. Démontrer que $x \longmapsto 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$ a une et une seule racine réelle positive.

---

21. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$. Trouver le nombre de solutions de l'équation $e^{ax} = bx$.

---

22. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même.
2) Montrer que si $x \neq 1$, $f(x)f(1/x) < 1$.

---

23. Calculer $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}$.

---

24. Calculer $\sup_{(x,y)\in[1,2]^2} \left(\dfrac{1+x}{y} + \dfrac{1+y}{x}\right)$.

---

25. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x^2)$.

---

26. Soient $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c)$$

---

27. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}^{n+2}$ $a \in I$. On suppose $f^{(n+2)}$ continue en a et $f^{(n+2)}(a) \neq 0$. Pour tout $x \in I\backslash\{a\}$, on écrit

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

avec $c_x \in]a,x[$. Montrer que

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in I\backslash\{a\}}} \frac{c_x - a}{x-a} = \frac{1}{n+2}$$

---

28. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose qu'il existe M_0 et M_2 dans $\mathbb{R}_+$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant M_0 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant M_2.$$

1) En écrivant la formule de Taylor-Lagrange entre un point x et un point $x+t$, démontrer que f' est bornée. Exprimer un majorant en fonction de M_0 et M_2. Ce majorant est-il encore valable si l'intervalle de définition n'est plus $\mathbb{R}$?
2) En écrivant la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+t$, puis entre x et $x-t$, démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

---

29. Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x) \leqslant e^x$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \leqslant 0$, on a $u_{2n+1}(x) \leqslant e^x \leqslant u_{2n}(x)$.

---

30. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,+\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{x^p}{p}$$

1) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$, on a

$$u_{2n}(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant u_{2n+1}(x)$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,0]$, on a

$$\ln(1+x) \leqslant u_n(x)$$

---

31. Soient $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $f : [a, a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$ sur $[a, a+h]$. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{2}\left(f'(a) + f'(a+h)\right) - \frac{h^3}{12} f'''(a+\theta h)$$

---

32. Soient $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$$

---

33. Soient $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $f : [a, a+2h] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, a+2h]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, a+2h[$ tel que

$$f(a+2h) = 5f(a) - 4f(a+h) + 2h\left(f'(a) + 2f'(a+h)\right) + \frac{h^4}{6} f^{(4)}(c)$$

---

34. Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right), \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}, \quad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\text{cotan } x, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln(1+\sqrt{2})}{x^\alpha - 1}$$

---

35. **Continuité et dérivabilité des fonctions convexes :** Soient I un intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1) Soit $x \in I$. Comparer pour $t < x < u$ avec $t, u \in I$ les réels

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad \text{et} \quad \frac{f(t) - f(u)}{t - u}.$$

2) Montrer que f admet des dérivées à gauche et à droite en tout point et que si $x < y$ dans I

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)$$

3) Conclure que f est continue sur I.

---

36. Montrer que $x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n$:

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

---

37. Soient a_1,..., a_n, b_1,..., b_n dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n}$$

---

38. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers $+\infty$.

---

39. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.

---

40. Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $k \in \mathbb{R}$.

1) On suppose que la dérivée seconde est minorée par k. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) \geqslant \frac{k}{2}t(1-t)(b-a)^2$$

2) On suppose que pour tout $(c, d) \in [a, b]$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$tf(c) + (1-t)f(d) - f(tc + (1-t)d) \geqslant \frac{k}{2}t(1-t)(d-c)^2$$

Prouver que $f'' \geqslant k$.

---

41. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

---

42. 1) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\text{th } x = \dfrac{2}{\text{th } 2x} - \dfrac{1}{\text{th } x}$.

2) En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$ la valeur de

$$\sum_{p=0}^{n-1} 2^p \text{th } (2^p x)$$

---

43. Pour tout $\alpha \in]1, +\infty[$, on note :

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc}]-1-\alpha, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha \ln\left(1 + \dfrac{x}{\alpha+1}\right) \end{array}$$

1) Etudier les variations de $x \longmapsto x - f_\alpha(x)$ pour tout $\alpha > 1$. En déduire que f_α possède, en dehors de 0, un unique point fixe x_α.

2) Vérifier que pour tout $\alpha > 1$, $-2 < x_\alpha < -1$. Montrer alors que :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} x_\alpha = -2$$