HX3 2006/2007 - Equations différentielles

1. Résoudre les équations différentielles suivantes où y est une fonction inconnue de x :

$$xy-(1+x^2)y'=0;\quad y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{5/2}\quad ;2xy'+4y+x=0;\quad xy'-2y=2x$$

$$y'+(\tan x)y=2x+x^2\tan x;\quad y'+y=\cos x-\sin x;\quad xy'-y=x\cos x-\sin x;\quad y'-\frac{y}{x}=\sqrt{1+\ln x}$$

$$y'-y=x\sqrt{y}$$

2. Résoudre (E) $(1-x^2)y'+xy=\dfrac{1}{x}+x\ln x-x$

1) sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$;
2) sur $]0,+\infty[$.

3. Résoudre les équations différentielles suivantes où y est une fonction inconnue de x :

$$y''-6y'+10y=1;\quad y''-2y'-3y=2x;\quad y''-2y'-3y=2e^{-x}$$

$$y''-2y'+5y=3\cos x;\quad y''+4y=2\cos x;\quad y''-4y'+3y=6e^{2x}$$

$$4y''+y=5\cos\frac{x}{2};\quad y''+2y'+y=x^2e^{-x};\quad y''-2y'+2y=x\cos x\,\mathrm{ch}\ x$$

$$y''+y=\frac{1}{\cos^3 x};\quad y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}e^{-x}$$

4. 1) Soit y_0 une solution de l'équation différentielle $y''+\varphi y'+\psi y=0$ ne s'annulant pas. Que devient cette équation si on effectue le changement de fonction inconnue $y=zy_0$?

2) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(1+x)y''-2y'+(1-x)y=0\quad \text{(remarquer que } x\longmapsto e^x \text{ est solution)}$$

$$x(1+x)y''-y'-2y=3x^2\quad \text{(remarquer qu'un certain monôme est solution de l'équation homogène associée)}$$

5. En effectuant un changement de variables de la forme $x=\varphi(t)$, g $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme conduisant à une équation différentielle à coefficients constants, résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0;$
2) $(\cos x)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(\sin x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\cos^3 x)y=0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3) $(1+x^2)^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0.$

6. Soit (E) $y''+q(x)y=0$ où $q:I\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue.

1) Que peut-on dire d'une solution y de (E) telle qu'il existe $x_0\in I$ vérifiant $y(x_0)=y'(x_0)=0$?

2) Soit y une solution non identiquement nulle de (E). Montrer que si x_0 est un zéro de y, il est isolé (autrement dit, il existe $\alpha>0$ tel que $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ ne contient pas d'autre zéro de y que x_0).

3) Montrer que le wronskien de deux solutions indépendantes est constant.

4) Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de (E) et α et β dans I deux zéros consécutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule en un point de $]\alpha,\beta[$.

7. Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\lim_{t\to+\infty} f'(t)+f(t)=0.\ \text{ Que dire de }\ \lim_{t\to+\infty} f(t)\ ?$$

8. Le lemme de relèvement : Soit $f : I \longrightarrow U$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = e^{i\varphi(x)}$$

Application Soit $\Phi : t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$ un arc $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$ ne passant pas par l'origine. Démontrer que qu'il existe $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $M(t) = O + \rho(t)\overrightarrow{U}(\varphi(t))$.

---

9. On supposera connu le résultat de l'exercice précédent. On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ \ y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

où $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues. On suppose qu'il existe y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de (E) et $\alpha > 0$ tels que $y_1^2 + y_2^2 = \alpha^2$.

1) Montrer que b est dérivable et $b' = -2ab$.

2) En déduire les solutions de :

$$(\cos x)y'' + (\sin x)y' + (\cos x)^3 y = 0 \quad \text{et} \quad xy'' - y' + x^3 y = 0$$

---

10. Le lemme de Gromwall : Soient $u, v : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues. On suppose qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$(\forall x \in [a, +\infty[) \ \left(u(x) \leqslant C + \int_a^x u(t)v(t)\mathrm{d}t \right)$$

Montrer alors que pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$u(x) \leqslant C \exp\left(\int_a^x v(t)\mathrm{d}t \right)$$

---

11. On supposera connu le lemme de Gromwall (cf. exercice précédent). Soit (E) $y'' + q(x)y = 0$ où $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $q > 0$ et $q' > 0$. Soit y une solution de (E). Exprimer pour $x \in \mathbb{R}_+$, la quantité $y'(x)^2 - y'(0)^2$. Puis, montrer que y est borné sur $\mathbb{R}_+$.

---

12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ un morphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$ continue.

1) Vérifier l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^a f \neq 0$. Montrer alors que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^a f(x+t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que f elle-même est dérivable.

2) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\lambda x}$.

3) Déterminer tous les morphismes continues du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, du groupe multiplicatif U dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

---

13. 1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère l'équation (E) $x^2y'' + axy' + by = k$. En effectuant le changement de variables $t = \ln|x|$, montrer que (E) se ramène à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2$.

---

14. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\mathrm{d}t.$$

---

15. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) + f(-x) = x + \cos x.$$

---

16. Résoudre les équations différentielles suivantes où y est une fonction inconnue de x :

$$y' = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)xy}; \quad y' = \frac{1 + x^2}{1 + y^2}; \quad y' = e^{x+y}$$