HX3 2006/2007 - Espaces affines

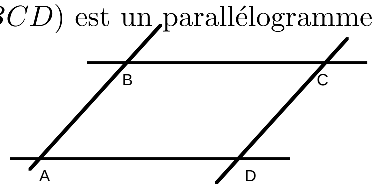
E désigne un espace affine réel de dimension finie, $\mathcal{P}$ un plan affine réel et $\mathcal{E}$ un espace affinel réel de dimension 3. Eventuellement, après le choix d'une origine, on peut considérer que ce sont des espaces vectoriels.

---

1. Soit $F \subset E$ non vide. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
(i) F est un sous-espace affine.
(ii) Pour tout $(A, B) \in F^2$ avec $A \neq B$, la droite (AB) est contenu dans F.

---

2. **Parallélogramme :** On dit que $(ABCD)$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



1) Soient $(A, B, C, D) \in E^4$. Vérifier l'équivalence des propositions :
(i) $(ABCD)$ est un parallélogramme;
(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
(iii) $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$: on dit que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
2) Soit $(A, B, C, D) \in E^4$. Montrer que $\left(\frac{A+B}{2}\frac{B+C}{2}\frac{C+D}{2}\frac{D+A}{2}\right)$ est un parallélogramme.
3) Soient A, B, C, D dans E tous distincts et non alignés. Vérifier l'équivalence des propositions :
(i) $(ABCD)$ parallélogramme;
(ii) (AB) parallèle à (CD) et (AD) parallèle à (BC).

---

3. Soient A, B, C, A', B' et C' six points de E, G (resp. G') l'isobarycentre de A, B et C (resp. A', B' et C').
1) Montrer que :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

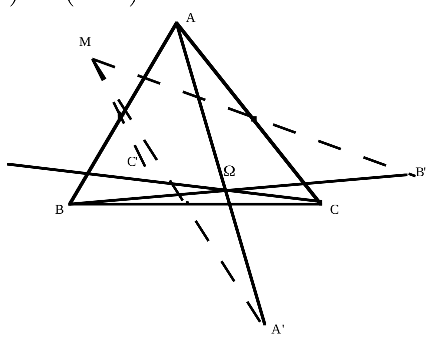
2) Montrer que G et G' sont confondues si et seulement s'il existe $M \in E$ tel que $(BA'CM)$ et $(B'AC'M)$ soient des parallélogrammes.

---

4. Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

5. Soit $(A, B, C, M) \in E^4$. On note A', B', C' les symétriques de M par rapport à $\frac{B+C}{2}$, $\frac{C+A}{2}$ et $\frac{A+B}{2}$ respectivement. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.



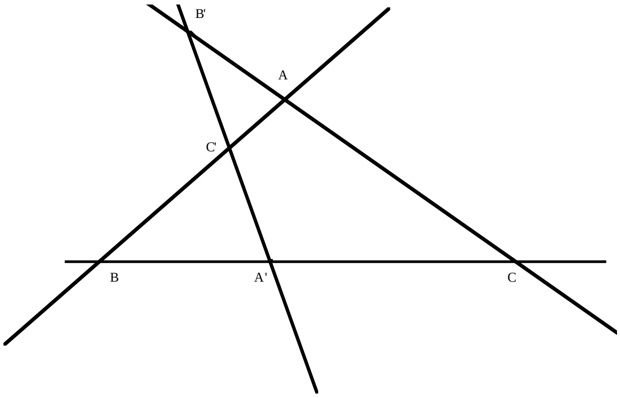
---

6. **Théorème de Ménélaüs et théorème de Céva :** Soient (ABC) un triangle (i.e. trois points non alignés) de E, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, distincts des sommets. Si M, P, Q sont alignés avec $M \neq P$, on note $\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}$ l'unique scalaire tel que

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}\overrightarrow{MP}$$

1) Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si :

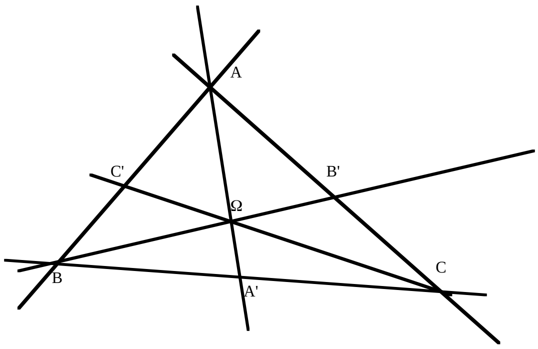
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \quad \text{(Théorème de Ménélaüs)}$$



Théorème de Ménélaüs

2) Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \quad \text{(Théorème de Céva)}$$



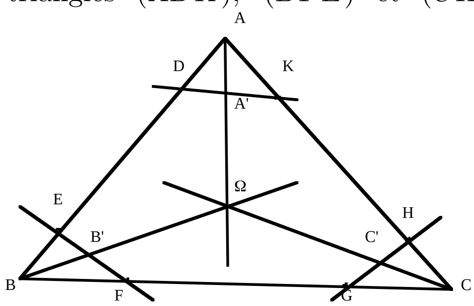
Théorème de Céva

---

7. Soient A, B, C et M quatre points de $\mathcal{P}$, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les parallèles à (MA') menée par A, à (MB') menée par B et à (MC') menée par C sont concourantes.

---

8. Soit (ABC) un triangle du plan $\mathcal{P}$. Sur chaque coté $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$, on choisit respectivement des segments $[DE]$, $[FG]$ et $[HK]$ de mêmes milieux que ces cotés. Montrer que les médianes (AA'), (BB'), (CC') des triangles (ADK), (BFE) et (CHG) sont concourantes ou parallèles.



---

9. Soient $u \in \mathcal{A}(E)$. On suppose que $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = I_{\overrightarrow{E}}$. Montrer alors qu'il existe un unique couple (t, s) où t est une translation de E et s une symétrie affine telle que $u = s \circ t = t \circ s$.

---

10. Trouver toutes les applications affines de E qui commutent avec n'importe quelle translation de E.

---

11. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. On suppose que u transforme toute droite D de E en une droite parallèle à D. Montrer que u est une homothétie ou une translation.

---

12. Soient $u \in \mathrm{GA}\ (E)$. On note $h_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 0$. Montrer que $u \circ h_{\Omega,k} \circ u^{-1}$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

---

13. Soient $x \in \overrightarrow{E}$, $x \neq 0$, h une homothétie de centre Ω et de rapport k. Préciser $h \circ t_x \circ h^{-1}$ et $t_x \circ h \circ t_x^{-1}$.

---

14. On note G l'ensemble des symétries par rapport à un point et des translations. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GA}\ (E)$.

---

15. Soient $u \in \mathcal{A}(E)$, X une partie finie non vide de E stable par u.

1) On suppose que $u(X) = X$. Montrer que l'isobarycentre de X est invariant par u.

2) On note $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} u^n(X)$. Montrer que $Y \neq \emptyset$ et $u(Y) = Y$. En déduire l'existence d'un point de E invariant par u.

---

16. 1) Soit G un sous-groupe fini de GA (E). Montrer qu'il existe $\Omega \in E$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(\Omega) = \Omega$.

2) Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = I_E$. Montrer que u admet un point fixe.

---

17. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ sans aucun point fixe. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u^n est aussi sans point fixe.

---

18. Préciser l'application $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini en posant pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

1) $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 4y + 2z - 4 \\ -2x - 3y - 2z + 2 \\ 4x + 8y + 5z - 8 \end{pmatrix}$

2) $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z + 1 \\ x - 2y + z + 1 \\ x + y - 2z - 1 \end{pmatrix}$

---

19. **Caractérisation des projections et des symétries :** Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.

1) Montrer que u est une projection si, et seulement si, $u \circ u = u$.

2) Montrer que u est une symétrie si, et seulement si, $u \circ u = I_E$.

---

20. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ tel que, pour tout point $M \in E$, $u^2(M)$ soit le milieu de $[M, u(M)]$. Montrer que u est une affinité.

---

21. Soient A, B, C, D quatre points distincts de E et non alignés. On suppose que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (on dit que $(ABCD)$ est un trapèze) et que, ni $(ABCD)$, ni $(ACBD)$ ne sont des parallélogrammes.

1) Vérifier l'existence d'une unique homothétie transformant A en D et B en C (resp. A en C et B en D).

2) Soient Ω et Ω' les centres des homothéties définies à la question précédente. Montrer que les quatre points Ω, Ω', $\frac{A+B}{2}$ et $\frac{C+D}{2}$ sont alignés.

---

22. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les cinq points $A = (1, 2, -1)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (2, 1, -1)$, $D = (1, 0, 4)$ et $E = (-1, 1, 1)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans (ABC) et (ADE).

---

23. Dans $\mathcal{E}$, deux plans parallèles coupent trois droites concourantes en A, B, C et A', B', C' respectivement. On note I, J et K les milieux de $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$ respectivement. Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes ou parallèles deux à deux.

---

24. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère. Montrer que les représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases} (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases} (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

définissent le même plan.

---

25. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'intersection de :

$$(P_1)\ \lambda x + \mu y = 1, \quad (P_2)\ \mu x + \lambda x + z = 0, \quad (P_3)\ x + \lambda y + \mu z = 1, \quad \text{et} \quad (P_4)\ \mu x + y + \lambda z = 0$$

soit réduite à un point.

---

26. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère les deux droites :

$$(D) \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}, \quad (D') \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que (D) et (D') ne sont pas parallèles.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que (D) et (D') soient concourantes. Donner alors l'équation du plan qu'elles engendrent.

---

27. Soient C_1 et C_2 deux convexes de E. Montrer que l'ensemble des milieux des segments $[M_1, M_2]$ où M_1 décrit C_1 et M_2 décrit C_2 est convexe.

---

28. Soit H un hyperplan affine de E.

1) Vérifier qu'un demi-espace affine de E, limité par H est convexe.
2) Soient A et B dans $E\backslash H$. Montrer que A et B sont du même coté de H si, et seulement si, $[A, B] \cap H = \emptyset$.

---

29. **Théorème de Gauss-Lucas :** Soient P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, α_1, α_2,..., α_n les racines distinctes ou confondues de P.

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z} - \overline{\alpha_k}}{|z - \alpha_k|^2}$$

2) En déduire que toutes les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

---

30. **Théorème de Helly :** On suppose $\dim E = n$. On se donne A_1, A_2,..., A_{n+2} des parties convexes de E telles pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n+2\}$:

$$\bigcap_{i \neq k} A_i \neq \emptyset$$

Montrer alors que :

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} A_i \neq \emptyset$$

On prendra pour cela $M_k \in \bigcap_{i \neq k} A_i$ et on écrira une relation de liaison affine entre M_1, M_2,..., M_{n+2} en distinguant les coefficients positifs ou nuls, puis les coefficients strictement négatifs.

---

31. **Théorème de Carathéodory :** On suppose que $\dim E = n$. Soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille finie de points de E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Enfin, on pose $M = \sum_{i \in I} \lambda_i M_i$.

1) On suppose que I contient au moins $n + 2$ éléments et on considère une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ non nulle de $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 0$ et $\sum_{i \in I} \alpha_i M_i = 0$. En posant

$$\lambda = \inf \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \alpha_i > 0 \right\}$$

et en considérant $M - \lambda 0$, vérifier l'existence de J strictement inclus dans I et $(\mu_j)_{j \in J}$ une famille de $\mathbb{R}_+$ tels que

$$\sum_{j \in J} \mu_j = 1 \quad \text{et} \quad M = \sum_{j \in J} \mu_j M_j$$

2) En déduire l'existence de $K \subset I$ de cardinal inférieur à $n + 1$ et d'une famille $(\nu_k)_{k \in K}$ de $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\sum_{k \in K} \nu_k = 1 \quad \text{et} \quad M = \sum_{k \in K} \nu_k M_k$$

3) Conclure que si C est l'enveloppe convexe d'une partie A de E, tout point de C s'exprime comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $n + 1$ points de A.