HX3 2006/2007 - Groupes

1. Ecrire les tables des lois de composition des groupes suivants : $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{A}_4$.

2. Soit G un monoïde tel que tout élément de G est inversible à droite. Montrer que G est un groupe.

3. Soit G un groupe. Montrer que $x\in G\longmapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G si et seulement si G est abélien.

4. Soit G un groupe, H une partie non vide de G. On suppose que pour tout $(x,y)\in H^2$, on a $x^{-1}y\in H$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

5. Soient G un groupe, $u\in G$ commutant avec tout élément de G, $(x,y,z)\in G$. On suppose $u=xyz$ et $x^2=y^2=z^2=1$. Montrer que $u^4=1$.

6. Soit G un groupe tel que pour tout $x\in G$, $x^3=1$. Montrer alors que pour tout $(x,y)\in G^2$, on a :

$$(xy)^2=y^2x^2,\ \ xy^2x=yx^2y\ \text{ et }\ x^2yx^2=y^2xy^2$$

7. $*$ Soit $G=]-1.1[$. Pour $(x,y)\in G^2$, on pose :

$$x*y=\frac{x+y}{1+xy}$$

Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien.

8. Soient G un groupe, H et H' des sous-groupes de G. Vérifier l'équivalence des propositions :
(i) HH' sous-groupe de G
(ii) $HH'=H'H$

9. Soient $f:G\longrightarrow H$ un morphisme de groupes, $(a_i)_{i\in I}$ une famille de G, G' et H' les sous-groupes de G et H respectivement engendré par $(a_i)_{i\in I}$ et $(f(a_i))_{i\in I}$. Montrer que $f(G')=H'$.

10. Soient G un groupe, H et H' deux sous-groupes de G.
1) Montrer que $H\cup H'$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H\subset H'$ ou $H'\subset H$.
2) On suppose H distinct de G. Montrer que le sous-groupe de G engendré par $G\backslash H$ est G tout entier.

11. Soient G un groupe, $(a,b)\in G^2$. Montrer que les ordres de a et a^{-1} sont égaux (i.e. soit tous les deux d'ordre infini, soit tous les deux du même ordre fini). Même question avec ab et ba, puis avec a et bab^{-1}.

12. Soit G un groupe cyclique de cardinal n engendré par a, $p\in\mathbb{N}$ un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de cardinal p de G, et que ce sous-groupe est cyclique engendré par $a^{\frac{n}{p}}$. En déduire en particulier que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

13. **Groupes tels que $x^2=1$:** Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement. On suppose que pour tout $x\in G$, $x^2=1$.
1) Montrer que G est abélien.
2) Soient H un sous-groupe de G et $a\in G\backslash H$.
a. Montrer que $H\cap aH=\emptyset$, et que $H\cup(aH)$ est un sous-groupe de G.
b. Si H est fini, quelle relation existe t-il entre le cardinal de H et le cardinal de $H\cup aH$?
3) On suppose G fini. Montrer que le cardinal de G est puissance de 2 (ou mieux : montrer qu'il existe $n\geqslant 0$ tel que $G\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.)

14. Déterminer la signature de la permutation σ, ainsi que σ^{10000} dans les cas suivants :
1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&1&5&2&4&6&3\end{pmatrix}$
2) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\11&5&7&12&10&3&6&4&2&1&9&8\end{pmatrix}$
3) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&8&5&3&9&1&7&6&4\end{pmatrix}$

15. **Théorème de Cayley :** Soit G un groupe fini de cardinal n dont la loi est notée multiplicativement.

1) On pose $\sigma_g : x \in G \longmapsto gx \in G$.
   a. Montrer que $\sigma_g \in \mathcal{S}_G$ pour tout $g \in G$.
   b. Démontrer que $\varphi : g \in G \longmapsto \sigma_g \in \mathcal{S}_G$ est un morphisme injectif.
2) Démontrer que $\mathcal{S}_G$ est isomorphe à $\mathcal{S}_n$ (on choisira une numérotation des éléments de G).
3) En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

---

16. Soit n un entier impair et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer que 4 divise $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\sigma(i)^2 - i^2)$.

---

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le nombre d'inversions (voir TD), quelle est la signature de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$$

---

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soient $\sigma \in \mathcal{S}_n$, a_1, a_2,..., a_k, k éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. Montrer que

$$\sigma \circ [a_1, a_2, \dots , a_k] \circ \sigma^{-1} = [\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots , \sigma(a_k)]$$

2) Soit u et v deux cycles de longueur k. Montrer l'existence de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma \circ u \circ \sigma^{-1} = v$.
3) On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que tout 3-cycle de $\mathcal{S}_n$ est dans $\mathcal{A}_n$. On suppose maintenant $n \geqslant 5$. Soient u et v deux 3-cycles de $\mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathcal{A}_n$ tel que $\sigma u \sigma^{-1} = v$.

---

19. **Exemples de générateurs de $\mathcal{S}_n$:** Soit $n \geqslant 3$.

1) Montrer que si a et b sont des éléments distincts de $[\![2, n]\!]$, $[a, b] = [1, a] \circ [1, b] \circ [1, a]$.
2) En déduire que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ s'écrit $t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_p$ avec les $t_i \in \{[1, 2], [1, 3], \dots , [1, n]\}$ (les t_i engendrent $\mathcal{S}_n$).
3) Soit $a \in [\![2, n-1]\!]$.
   a. Montrer que $[1, a+1] = [1, a] \circ [a, a+1] \circ [1, a]$. En déduire que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ s'écrit $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_p$ avec les u_i dans $\{[1, 2], [2, 3], \dots , [n-1, n]\}$.
   b. Retrouver ce résultat en faisant une récurrence sur n.
4) Conclure que le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par $[1, 2]$ et $[1, 2, \dots , n]$ est $\mathcal{S}_n$ tout entier (à l'aide du 1) de l'exercice 18, on calculera $[1, 2, \dots , n] \circ [1, 2] \circ [1, 2, \dots , n]^{-1}$).

---

20. **Exemples de générateurs de $\mathcal{A}_n$:** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

1) Soient a, b, c et d quatre éléments distincts de $\{1, 2, \dots , n\}$ Montrer que $[a, b] \circ [c, d] = [c, b, d] \circ [a, c, b]$. En déduire que tout élément de $\mathcal{A}_n$ s'écrit $c_1 \circ \dots \circ c_p$ où les c_i sont des cycles d'ordre 3.
2) Soient a, b, c trois éléments distincts de $\{3, 4, \dots , n\}$. Vérifier les égalités (on pourra éventuellement utiliser le 1) de l'exercice 18) :

$$[1, a, b] = [1, 2, b]^{-1} \circ [1, 2, a] \circ [1, 2, b],\ [2, a, b] = [1, 2, a] \circ [1, 2, b] \circ [1, 2, a]^{-1} \text{ et } [a, b, c] = [1, 2, c] \circ [2, a, b] \circ [1, 2, c]^{-1}$$

En déduire que le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par $\{[1, 2, 3], [1, 2, 4], \dots , [1, 2, n]\}$ est $\mathcal{A}_n$.
3) On suppose n impair. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par $[1, 2, 3]$ et $[1, 2, \dots , n]$.
4) On suppose n pair. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par $[1, 2, 3]$ et $[2, 3, \dots , n]$.

---

21. Déterminer un morphisme non constant du groupe $\mathcal{S}_4$ dans le groupe $\mathcal{S}_3$.

---

22. **Sous-groupes distingués :** Pour tout groupe G et tout sous-groupe H de G, on dit que H est *distingué dans* G si :

$$((\forall g \in G)\ (\forall h \in H)\ (ghg^{-1} \in H)), \text{ ce que l'on peut écrire : } (\forall g \in G)(gHg^{-1} \subset H)$$

1) Soient G et G' deux groupes.
   a. Montrer que $\{1\}$ et G sont des sous-groupes distingués de G.
   b. Que peut-on dire des sous-groupes distingués lorsque G est abélien?

c. Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes. Montrer que $\ker f$ est distingué dans G.

2) Soient G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes distingués de G. Montrer que $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe distingué de G.

3) Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G, H étant supposé distingué. Montrer que HK est un sous-groupe de G.

4) Soient G un groupe à $2n$ éléments, et H un sous-groupe de cardinal n. Montrer que H est distingué.

5) Soit G un groupe. On note D le sous-groupe de G engendré par $\{aba^{-1}b^{-1} \in G,\ (a,b) \in G^2\}$ (groupe dérivé de G).

a. Montrer que tout sous-groupe de G contenant D est distingué.

b. Montrer que D est invariant par tout automorphisme de G.

---

23. **Centralisateur et normalisateur :** On supposera connue la notion de sous-groupe distingué (voir exercice précédent). Soit G un groupe. Pour tout $A \subset G$, on note $C(A) = \{x \in G, \forall a \in A,\ xa = ax\}$ (centralisateur de A) et $N(A) = \{x \in G, Ax = xA\}$ (normalisateur de A). Montrer que $C(A)$ et $N(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

---

24. **Groupe des automorphismes :** Soit G un groupe. On appelle *automorphisme de* G tout morphisme bijectif de G sur G. On note $\mathrm{Aut}\ G$ l'ensemble des automorphismes de G.

1) Montrer que $\mathrm{Aut}\ G$ est un groupe pour la composition.

Pour tout $a \in G$, on note f_a l'application de G dans G telle que pour tout $x \in G$, $f_a(x) = axa^{-1}$. Une telle application est appelée *automorphisme intérieur de* G. On note $\mathcal{H} = \{f_a \in \mathcal{F}(G,G), a \in G\}$.

2) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}\ G$ (voir exercice 22).

---

25. 1) Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes. On suppose G et H finis.

a. Soit $y \in \mathrm{im}\ f$. Démontrer que le cardinal de $f^{<-1>}(\{y\})$ est égal à celui de $\ker f$.

b. En déduire que $\mathrm{Card} G = \mathrm{Card\ im}\ f \times \mathrm{Card}\ \ker f$.

2) Soit $f : G \longrightarrow G$ un morphisme de groupes, G est supposé fini. Montrer l'équivalence

$$\ker f = \ker f^2 \iff \mathrm{im}\ f = \mathrm{im}\ f^2.$$

---

26. Montrer que $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène. En déduire que $\mathbb{Z}^2$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$.

---

27. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. On considère $f : (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \longmapsto y \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que f est un morphisme de groupes.

2) Montrer que $\ker f$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En déduire que les sous-groupes de $\ker f$ sont monogènes.

3) On suppose que $f(H) = \{0\}$. Démontrer alors que H est monogène.

On suppose désormais que $f(H) \neq \{0\}$.

4) Démontrer l'existence de $e_1 = (a,b) \in H$, $b \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $X \in H$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $X - k.e_1 \in \ker f$.

5) Démontrer l'existence de $e_2 \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ tel que $\mathbb{Z}.e_2 = H \cap \ker f = H \cap (\mathbb{Z} \times \{0\})$.

6) Démontrer que $H = \mathbb{Z}.e_1 + \mathbb{Z}.e_2$.

7) Montrer que H est monogène si, et seulement si $e_2 = 0$.

---

28. **Groupe quotient :** On supposera connue la notion de sous-groupe distingué (voir exercice 22). Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué. On définit sur G la relation binaire $\mathcal{R}_H$ par :

$$x\mathcal{R}_H y \iff x^{-1}y \in H (\iff y \in xH)$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi de G.

2) Montrer que $G/\mathcal{R}_H$ peut être muni naturellement d'une structure de groupe : ce groupe est noté G/H et s'appelle *groupe quotient de* G *par* H.

3) Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes. Montrer que :

$$G/\ker f \simeq \mathrm{im}\ f$$

4) On reprend les notations de l'exercice 24 et on note $C = \{a \in G,\ \forall x \in G, ax = xa\}$ le centre de G. Montrer que C est un sous-groupe distingué de G et que

$$\mathcal{H} \simeq G/C$$

---

29. **Théorème d'isomorphisme dans le cas abélien :** on supposera connus les résultats de l'exercice sur la bijection canonique (chapitre 1). Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes. On suppose G abélien.

1) Montrer que la relation d'équivalence associée à f est égale à la congruence modulo $\ker f$ définie par

$$\forall (x, y) \in G^2 \;\; x \equiv y \pmod{\ker f} \iff y \in x \ker f \iff x^{-1}y \in \ker f.$$

On rappelle que $G/\ker f$ est muni d'une structure de groupes grâce à la loi quotient définie par $\bar{x}.\bar{y} = \overline{xy}$ pour $x, y \in G$.

2) Montrer que la bijection canoniquemlent associée 'a f définie par

$$\bar{f} : \begin{array}{ccc} G/\ker f & \longrightarrow & \operatorname{im} f \\ \bar{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes. Retrouver le théorème de factorisation lorsque $G = \mathbb{Z}$.