HX3 2006/2007 - Polynômes

1. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leqslant n$. Montrer que

$$C_{2n}^p=\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_n^{p-k}$$

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$(X^3+X^2+X+1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k = X^{2n+3}+X^{2n+1}+X^2+1$$

3. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, X^2-X+1 divise $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$.

4. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de $K[X]$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\deg P_n=n$.

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $K_n[X]=\text{Vect }(1,X,X^2,\dots,X^n)=\{P\in K[X],\ \deg P\leqslant n\}$.

2) En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$.

5. Soit $u : K[X]\longrightarrow K[X]$ linéaire et $\alpha\in\mathbb{N}$ tels que, pour tout $P\in K[X]$, on ait $u(P)=0$ si $\deg P<\alpha$ et $\deg u(P)=\deg P-\alpha$ si $\deg P\geqslant\alpha$. Montrer que $\operatorname{im} u=K[X]$ et $\ker u=\{P\in K[X],\ \ \deg P<\alpha\}$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

6. **Valuation d'un polynôme :** Si $P=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n\in K[X]$, $P\neq 0$, on appelle valuation de P le plus petit entier n tel que $a_n\neq 0$. On la note $\text{val}(P)$. On pose $\text{val}(0)=+\infty$.

1) Montrer que $\text{val}(P+Q)\geqslant\min(\text{val}(P),\text{val}(Q))$ et que si $\text{val}(P)\neq\text{val}Q$, $\text{val}(P+Q)=\min(\text{val}(P),\text{val}(Q))$.

2) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de $K[X]$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\text{val}(P_n)=n$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

7. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{N}^n$ tel que, pour tout $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $\alpha_k\equiv k\pmod n$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1}X^{\alpha_k}$ est divisible par $\sum_{k=0}^{n-1}X^k$.

8. Calculer le pgcd et le ppcm de $X^5-X^4+2X^3+1$ et de $X^5+X^4+2X^2-1$.

9. Soit $(P,Q)\in K[X]^2$ tel que $\text{pgcd}(P,Q)=1$. Montrer que $\text{pgcd}(P+Q,PQ)=1$.

10. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille finie non vide d'éléments de $K[X]\backslash\{0\}$, M un multiple commun unitaire des P_i. Montrer que

$$\underset{i\in I}{\text{ppcm}}\, P_i\ \underset{i\in I}{\text{pgcd}}\,\frac{M}{P_i}=M=\underset{i\in I}{\text{pgcd}}\, P_i\ \ \text{ppcm}\,\frac{M}{P_i}$$

Que deviennent ces formules pour $M=\prod_{i\in I}P_i$ (avec P_i unitaire)?

11. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille finie de polynômes unitaires. Vérifier l'équivalence des deux conditions :

(i) $\text{ppcm}_{i\in I} P_i=\prod_{i\in I}P_i$;

(ii) Les P_i sont premiers deux à deux.

12. Soient $A\in K[X]$, $(P_i)_{i\in I}$ une famille finie de polynômes non nuls de $K[X]$. Montrer que

$$\text{pgcd}(A,\underset{i\in I}{\text{ppcm}}\, P_i)=\underset{i\in I}{\text{ppcm}}(\text{pgcd}(A,P_i))\quad\text{et}\quad \text{ppcm}(A,\underset{i\in I}{\text{pgcd}}\, P_i)=\underset{i\in I}{\text{pgcd}}(\text{ppcm}(A,P_i))$$

13. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $K[X]$. On pose $D=\text{pgcd}_{i\in I}P_i$ et $M=\text{ppcm}_{i\in I}P_i$.

1) Vérifier l'existence de $J\subset I$, J fini tel que $D=\text{pgcd}_{i\in J}P_i$.

2) Lorsque $M\neq 0$, vérifier l'existence de $L\subset I$, L fini tel que $M=\text{ppcm}_{i\in L}P_i$ (et même montrer que $\{K^*P_i, i\in I\}$ est fini).

14. Soit $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in (K[X]\backslash K)^n$. Montrer que $1+\prod_{i=1}^{n} P_i$ n'est divisible par aucun P_i. En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes irréductibles unitaires est infini.

15. Soit $(A, B) \in K[X]$. Vérifier, pour tout diviseur D de AB, l'existence d'un diviseur P de A et d'un diviseur Q de B tels que $D = PQ$.

16. Soient $P \in K[X]$, m et n dans $\mathbb{N}^*$, $Q = P^{2m} + (P+1)^n - 1$. Montrer que $P^2 + P|Q$.

17. Montrer que pour tout $(P, Q) \in K[X]^2$, $P \neq 0$ et $Q \neq 0$:

$$\mathrm{pgcd}(P^2 + Q^2, PQ) = (\mathrm{pgcd}(P, Q))^2$$

18. 1) Soient P et Q dans $K[X]$ non constants, $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$. Vérifier l'existence d'un unique $(U, V) \in K[X]^2$ tels que $UP + VQ = 1$ et $\deg U < \deg Q$, $\deg V < \deg P$. Comment déduit-on les autres couples (U', V') vérifiant $U'P + V'Q = 1$ à partir de (U, V)?

2) Soient $P = X^3 - X + 1$ et $Q = X^2 + 1$ dans $K[X]$. Résoudre en (U, V) l'équation $UP + VQ = 1$ où $(U, V) \in K[X]^2$.

19. Soient $\alpha \in K^*$, $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$.

1) Soit r le reste de la division euclidienne de n par p. Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - \alpha^n$ par $X^p - \alpha^p$ est de la forme $\lambda(X^r - \alpha^r)$ où $\lambda \in K^*$.

2) On pose $d = \mathrm{pgcd}(n, p)$. Montrer que

$$\mathrm{pgcd}(X^n - \alpha^n, X^p - \alpha^p) = X^d - \alpha^d$$

Appliquer au cas $\alpha = 1$.

20. Soit $P \in K[X]$ non constant . On note E l'ensemble des éléments de $K[X]$ de degré strictement inférieur à $\deg P$.

Montrer que tout élément de $K[X]$ s'écrit de façon unique $\sum_{n \in \mathbb{N}} R_n P^n$ où $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille à support fini d'éléments de E.

21. Soient $P \in K[X]^*$, $Q \in K[X]$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\overline{Q}$ inversible dans $K[X]/PK[X]$;
(ii) $\overline{Q}$ régulier dans $K[X]/PK[X]$;
(iii) P et Q sont premiers entre eux.

22. Soit $P \in K[X]$, $P \notin K$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $K[X]/PK[X]$ est intègre;
(ii) $K[X]/PK[X]$ est un corps;
(iii) P est irréductible.