HX3 2006/2007 - Intégrale des fonctions continues

1. Soient $a<c<b$, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f, \frac{1}{b-c}\int_c^b f\right)$$

---

2. 1) Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f| = \left|\int_a^b f\right|$ si et seulement si f garde un signe constant large.

2) Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ continue. Donner une CNS pour que $\displaystyle\int_a^b |f| = \left|\int_a^b f\right|$.

---

3. Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. On suppose $\displaystyle\int_0^1 f=\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que $f(c)=c$.

---

4. Soit $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ continue non nulle telle que :

$$\int_0^1 f=\int_0^1 f^2. \text{ Montrer que } f=1$$

---

5. **Autour de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :** 1) Soient $f,g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ continues telles que $fg\geqslant 1$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right)\geqslant 1$$

2) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, E l'ensemble des fonctions $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0)=a$ et $f(1)=b$. Déterminer

$$\inf_{f\in E}\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte?

---

6. Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=0. \text{ Que dire de } f?$$

---

7. Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{K}$ continue, $a>0$. Montrer que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_h^{ah}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln a$$

---

8. Déterminer :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

---

9. Soit $f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ convexe de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $n\geqslant 2$.

1) Etablir :

$$\int_1^n f\leqslant\frac{1}{2}f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)$$

2) Montrer que si $1\leqslant k\leqslant n-1$:

$$\int_k^{k+\frac{1}{2}} f\geqslant\frac{1}{2}f(k)+\frac{1}{8}f'(k) \quad\text{et}\quad \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} f\geqslant\frac{1}{2}f(k+1)-\frac{1}{8}f'(k+1)$$

et en déduire :

$$0 \leqslant \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f \leqslant \frac{1}{8}\left(f'(n) - f'(1)\right)$$

---

10. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$.

1) Montrer que

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x$$

2) En déduire que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

---

11. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2x \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Montrer que f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la suite $(f_n)_{n>0}$ converge simplement vers 0. Vérifier cependant que $\int_0^1 f_n$ ne converge pas vers 0.

---

12. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Vérifier l'existence de $\alpha < \beta$ dans $[a,b]$ tel que pour tout $x \in [\alpha,\beta]$:

$$f(x) \geqslant M - \varepsilon$$

2) Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f(x)^n \mathrm{d}x} = M = \|f\|_\infty$$

---

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \mathrm{d}x$$

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

2) Vérifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que, lorsque n tend vers l'infini :

$$I_n \sim \frac{1}{4n}$$

3) Conclure que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

---

14. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$.

---

15. Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1)$$

---

16. **Irrationalité de π :** On désire prouver par l'absurde que π est irrationnel. Pour cela, on suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\mathrm{d}x$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$. En déduire que $I_n \in \mathbb{Z}$.
3) Aboutir à une contradiction et conclure.

---

17. **Lemme de Riemann-Lebesgue :** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

1) a. Soient $\alpha < \beta$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{inx}\mathrm{d}x = 0$$

b. Soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0$$

c. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$$

2) On désire prouver le résultat du 1) par une méthode différente.

a. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x = 0$$

b. Conclure comme en 1) pour f seulement continue par morceaux.

---

18. Calculer la dérivée de la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-2x}^{x^4} \arctan t \ \mathrm{d}t$$

---

19. Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t.$$

---

20. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x)\int_0^x f \ \text{décroît. Montrer que } f = 0.$$

---

21. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant k \int_0^x f$$

Montrer en étudiant la fonction $x \longmapsto e^{-kx} \displaystyle\int_0^x f$ que $f = 0$.

---

22. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + \int_0^x (x - t) f(t) \mathrm{d}t = ax + b.$$

---

23. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $f > 0$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'une unique subdivision $0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = 1$ de $[0, 1]$ telle que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f = \frac{1}{n} \int_0^1 f \quad \left(\text{on introduira } F : x \in [0, 1] \longmapsto \int_0^x f \ \right)$$

2) Soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Etudier :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} g\left(x_k^{(n)}\right)$$

---

24. Soit $f : [0, e] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n > 0}} n \int_1^{1 + \frac{1}{n}} f(x^n) \mathrm{d}x = \int_1^e \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$$

---

25. Calculer les limites des suites $(u_n)_{n>0}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n + k}{n^2 + k^2}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}, \quad \text{et } u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n + k)}$$

---

26. Calculer les limites des suites $(u_n)_{n>0}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k + 1}{kn + n^2}, \quad u_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad u_n = \frac{1}{n^{2p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p (k + 1)^p \quad (p > 0)$$

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right), \quad n^2 \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}.$$

---

27. Montrer que lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$$

---

28. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on note $q(x) = \text{Card}\{(a,b) \in \mathbb{N}^2,\ a^2+b^2 \leqslant x^2\}$. Trouver un équivalent de q en $+\infty$.

---

29. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) = -\frac{b-a}{2}\int_a^b f' = -\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}$$

---

30. **Inégalité de Young :** Soient $a > 0$, $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, $f' > 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f^{-1} est définie, dérivable sur $[0, f(a)]$.

2) Montrer que si $x \in [0,a]$:

$$\int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x)$$

3) En déduire que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $y \in [0, f(a)]$:

$$\int_0^x f + \int_0^y f^{-1} \geqslant xy$$

4) On ne suppose plus f de classe $\mathcal{C}^1$, mais f seulement continue, strictement croissante avec $f(0) = 0$. A l'aide des sommes de Riemann, prouver que l'égalité du 2) est encore vraie.

---

31. Soit $a < b$, $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $F = \{g \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}),\ g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0\}$.

1) Soit $f \in E$. Montrer l'équivalence :

$$(\exists g \in F)(g'' = f) \iff \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = 0$$

2) Soit $h \in E$ telle que :

$$(\forall g \in F)\left(\int_a^b hg'' = 0\right)$$

Montrer que h est une fonction affine.

---

32. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. Déterminer :

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 f^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

---

33. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f$$

---

34. Donner la limite, puis un équivalent de :

$$I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 0)$$

---

35. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $f(a) = 0$. Prouver l'inégalité :

$$\int_a^b f^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2$$

---

36. **Formule de la moyenne :** Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose g à valeurs positives ou nulles. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

37. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \dfrac{x^4}{24}$.

38. Soit $x > 0$. Donner une majoration de l'erreur commise en prenant $x - \dfrac{x^2}{2}$ comme valeur approchée de $\ln(1+x)$. Donner une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

39. Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x) \leqslant e^x$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \leqslant 0$, on a $u_{2n+1}(x) \leqslant e^x \leqslant u_{2n}(x)$.

40. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, +\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{x^p}{p}$$

1) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$, on a

$$u_{2n}(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant u_{2n+1}(x)$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 0]$, on a

$$\ln(1+x) \leqslant u_n(x)$$