HX3 2006/2007 - Groupe orthogonal

1. Soient E un espace euclidien de dimension n, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E^n$. On suppose que pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a $(e_i|e_j) = (\varepsilon_i|\varepsilon_j)$. Vérifier l'existence d'un unique $u \in O(E)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_i) = \varepsilon_i$. En déduire en particulier que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base.

---

2. **Décomposition QR :** Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. A l'aide de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in O(n) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où R est triangulaire supérieure avec ses éléments diagonaux strictement positifs tel que $P = QR$.

---

3. 1) Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{im}\, u$ possède dans E un supplémentaire F stable par u. Montrer que $F = \ker u$.

2) Soient E un espace euclidien, $u \in O(E)$, $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$\ker P(u) = [\mathrm{im}\ P(u)]^{\perp}$$

---

4. **Générateurs de $O(E)$:** Soit E un espace euclidien. Il s'agit de montrer que les réflexions engendrent le groupe $O(E)$. Soit $u \in O(E)$.

1) Soit $e \in E$ tel que $u(e) \neq e$. On note s la réflexion qui échange e et $u(e)$. Démontrer que :

$$\ker(u - I) \subset \ker(s \circ u - I) \quad \text{et} \quad \ker(u - I) \neq \ker(s \circ u - I)$$

2) En déduire l'existence d'un nombre fini de réflexions s_1,..., s_p vérifiant

$$u = s_1 \circ \ldots \circ s_p \quad \text{et} \quad p \leqslant \mathrm{rg}\ (u - I)$$

3) Montrer que dans le plan euclidien orienté, une rotation s'écrit comme le produit de deux symétries par rapport à une droite.

4) Montrer que les retournements engendrent $SO(E)$ si $\dim E = 3$ i.e que toute rotation de E est produit de symétries orthogonales par rapport à une droite.

---

5. Soient E un espace euclidien, $u : E \longrightarrow E$ (non supposé linéaire) telle que

$$(\forall (x, y) \in E^2)\ (\ (u(x)|u(y)) = (x|y)\ )$$

1) Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in E^2$, $\|u(x + y) - u(x) - u(y)\|^2$ et $\|u(\lambda x) - \lambda u(x)\|^2$.

2) En déduire que u est bien linéaire.

3) Est-ce que u est linéaire si on impose seulement $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$?

---

6. Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) $u \in \mathbb{R}O(E)$;

(ii) Pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $(x|y) = 0$, on a $(u(x)|u(y)) = 0$.

On pourra remarquer que, si i et j sont unitaires, $(i + j|i - j) = 0$).

---

7. Soit P un plan euclidien orienté, $\theta \in \mathbb{R}$, D une droite de P et $D' = r_\theta(D)$. Montrer que

$$r_\theta \circ s_D = s_D \circ r_{-\theta} \quad \text{et} \quad s_{D'} \circ s_D = r_{2\theta}$$

---

8. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure d'espace euclidien orienté. On considère les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Quel est l'angle orienté des vecteurs a et b?

2) Donner la matrice dans la base canonique de la réflexion s par rapport à $\mathbb{R}a$ et celle de la réflexion t par rapport à $\mathbb{R}b$.

3) Calculer matriciellement $t \circ s$ et préciser sa nature géométrique.

---

9. Soient E un espace euclidien de dimension n. Vérifier l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $(i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on ait

$$(e_i|e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Calculer alors $\mathcal{G}(e_1, \dots, e_n)$.

---

10. Soient E un espace euclidien , $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1) Montrer que

$$\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

(écrire $x_n = x'_n + x''_n$, $x'_n \in \text{Vect }(x_1, \dots, x_{n-1})^\perp$ et $x''_n \in \text{Vect }(x_1, \dots, x_{n-1})$ et faire une récurrence sur n).

2) On suppose que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $x_i \neq 0$. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) = \|x_1\| \dots \|x_n\|$.
(ii) Pour tout $(i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, on a $(x_i|x_j) = 0$.

---

11. Soit E un espace euclidien orienté de dimension n, $a_1, \dots, a_n$ n une famille libre de E. On note $(e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt de $(a_1, \dots, a_n)$. On note P la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(a_1, \dots, a_n)$.

1) Démontrer que P est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs. Préciser ces éléments diagonaux.

2) Démontrer que $\mathcal{G}(a_1, \dots a_n) \leqslant \|a_1\| \cdots \|a_n\|$ et qu'il y a égalité, si et seulement si les a_i sont orthogonaux deux à deux. En donner une interprétation en termes de volumes.

---

12. **Inégalité d'Hadamard :** En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|\det A| \leqslant \sqrt{a_{11}^2 + \ldots + a_{1n}^2}\sqrt{a_{21}^2 + \ldots + a_{2n}^2} \ldots \sqrt{a_{n1}^2 + \ldots + a_{nn}^2}$$

---

13. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, (i,j,k) une base orthonormale directe de E.

1) Calculer $\|x \wedge i\|^2 + \|x \wedge j\|^2 + \|x \wedge k\|^2$.

2) En déduire :

$$\max(\|x \wedge i\|, \|x \wedge j\|, \|x \wedge k\|) \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}$$

---

14. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $(a,b,c) \in E^3$. Etablir :

$$[b+c, c+a, a+b] = 2[a,b,c] \quad \text{et} \quad ([a,b,c] = 0 \Longleftrightarrow (a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = 0)$$

---

15. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $e \in E$, $e \neq 0$, $y \in e^\perp$. Vérifier l'existence d'un unique $x \in e^\perp$ tel que $e \wedge x = y$. Exprimer alors x à l'aide de e et y.

---

16. **Identité de Jacobi :** Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $(a,b,c) \in E^3$. Etablir :

$$a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0$$

---

17. Soit E un espace euclidien de dimension finie, orienté, rapporté à une base orthonormée positive $\mathcal{B}$. Préciser l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est l'une des suivantes :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & -26 & 7 \\ -23 & 2 & 14 \\ 14 & 7 & 22 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{1421}\begin{pmatrix} 609 & 602 & -1134 \\ 1218 & 126 & 721 \\ 406 & -1281 & -462 \end{pmatrix}$$

---

18. 1) Soient P un plan euclidien orienté, $\theta \in \mathbb{R}$, u la rotation d'angle θ. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$u(x) = \cos\theta x + \sin\theta r_{\frac{\pi}{2}}(x)$$

2) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $\theta \in \mathbb{R}$, u la rotation d'angle θ et d'axe D dont k est le vecteur unitaire positif. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$u(x) = \cos\theta x + \sin\theta k \wedge x + (x|k)(1-\cos\theta)k$$

3) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe dirigé par $(1,1,1)$.

---

19. Soit $A = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté.

1) Vérifier que $\ker A \perp \mathrm{im}\, A$.

2) Ecrire la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ formée d'une base de $\ker A$ et d'une base de im A.

3) En déduire la nature géométrique de A.

---

20. Quelle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté) de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe la droite orientée dirigée par $(1,1,-1) \in \mathbb{R}^3$.

---

21. Soit G un sous-groupe fini de $O(2)$ de cardinal n.

1) On suppose $G \subset \mathrm{SO}\,(2)$. Préciser G.

2) On suppose que G n'est pas contenu dans SO (2). Montrer que Card$G$ est pair, puis préciser G. Montrer que G est le groupe d'isomorphismes orthogonaux laissant globalement invariante une certaine figure géométrique inscrite dans le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.