HX3 2006/2007 - Introduction aux séries

1. 1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. En déduire que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_{n+1}-u_n) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}},\quad \sum \frac{\arctan n}{n},\quad \sum \frac{x^n}{n}\ (x\in\mathbb{R}),\quad \sum \frac{\cos n}{n^2},\quad \sum \frac{x^n}{n^n}\ (x\in\mathbb{R}), \sum n x^n\ (x\in\mathbb{R})$$

3. **Extension du théorème de comparaison des séries à termes positifs :** soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que $v_n = o(u_n)$ pour n tendant vers $+\infty$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Démontrer que $\sum v_n$ converge également.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Déterminer la nature de $\sum \dfrac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ième entier naturel non nul dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9.

6. Calculer la somme des séries de terme général

$$u_n = \frac{1+2+\ldots+n}{1^3+2^3+\ldots+n^3},\quad v_n = \frac{n^4-(n+1)^3}{n!},\quad w_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

7. $*$ Calculer la somme des séries de terme général

$$x_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ (n\geqslant 2),\quad \text{et}\quad y_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$. On pose pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

9. Pour $|z|<1$, sommer la série de terme général $u_n = \dfrac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$ en utilisant l'identité $\dfrac{u}{1-u^2} = \dfrac{1}{1-u} - \dfrac{1}{1-u^2}$.

10. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$? (on minorera une tranche entre $N+1$ et $3N$ par exemple)

11. Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}$$

12. Soit $\sum u_n$ une série convergente de $\mathbb{C}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_1+2u_2+3u_3+\ldots+nu_n}{n(n+1)}$$

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge et a la même somme que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (Utiliser le théorème de Césaro).

---

13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

1) Montrer que si $\sum u_n$ converge, $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

2) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature et qu'en cas de convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$$

---

14. **Théorème spécial des séries alternées :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de $\mathbb{R}_+$ convergente vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$.

1) Etudier la monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge. Application à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

3) Démontrer que $\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.