HX3 2006/2007 - Espaces euclidiens

1. Soient E un espace euclidien, x_1,..., x_n n vecteurs de E de norme 1 tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Etablir :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i|x_j) = -\frac{n}{2}$$

---

2. Soit E un espace euclidien. Pour tout sous-espace F de E, on note s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Soient F et F' deux sous-espaces.

1) Montrer que $s_{F^\perp} = -s_F$.

2) On suppose $F \perp F'$. Montrer que $s_F \circ s_{F'} = s_{(F+F')^\perp}$.

---

3. 1) Soient E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$, $F = \text{Vect}\ (e_1, \ldots, e_n)$. On pose :

$$u: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & ((x|e_1), \ldots, (x|e_n)) \end{array}$$

Montrer que u est linéaire et injective. En déduire que :

$$\text{rg}\ (e_i|e_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \text{rg}\ (e_1, \ldots, e_n)$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{rg}\ {}^tAA = \text{rg}\ A$$

---

4. **Polynômes de Tchebychev :** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$:

$$(P|Q) = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)\mathrm{d}t$$

1) Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.

2) Soit $n \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in E$, appelé n-ième polynôme de Tchebychev, tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

Montrer que T_n est de degré n, qu'il vérifie la relation de récurrence $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ pour tout $n > 0$. Calculer son coefficient dominant, ainsi que T_0, T_1, T_2 et T_3.

3) Soit $n > 0$. Montrer que $(T_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une famille orthogonale de E. Calculer $\|T_n\|$.

4) Soit $n > 0$. Montrer que $\left(\frac{T_p}{\|T_p\|}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt de la famille $(1, X, \ldots, X^n)$.

5) Montrer que :

$$\inf_{\substack{P\in\mathbb{R}[X],\ P \text{ unitaire} \\ \deg P = n}} \int_0^\pi (P(\cos t))^2\, \mathrm{d}t$$

est atteint en $T_n/2^{n-1}$ et calculer le, ainsi que :

$$\inf_{\substack{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P \text{ unitaire} \\ P\neq 0}} \int_0^\pi (P(\cos t))^2\, \mathrm{d}t$$

---

5. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x \longmapsto e^{-x}x^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x}P(x)Q(x)\mathrm{d}x,$$

on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Interpréter en terme de distance le réel

$$I = \inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+\cdots+a_nx^n)^2\mathrm{d}x.$$

En déduire que cette borne inférieure est atteinte en un unique $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

4) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\mathrm{d}x$.

5) En déduire $I = \dfrac{1}{n+1}$.

---

6. Montrer que sur $\mathbb{R}[X]$, l'application :

$$(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2 \longmapsto (P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire. Existe t-il $A\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $(P|A)=P(0)$. Conclusion?

---

7. Pour $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $(A|B)=\mathrm{Tr}\,{}^tAB$. Montrer que l'on a défini ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

---

8. Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver :

$$\sqrt{\mathrm{Tr}(A+B)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{Tr}A^2} + \sqrt{\mathrm{Tr}B^2}$$

---

9. Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. On note e_i' la projection orthogonale de e_i sur F. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|e_i'\|^2$ est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.

---

10. Soit E un espace euclidien et $(x_1,\dots x_n)\in E^n$ tels que pour $i\neq j$, $\|x_i-x_j\|\geqslant 2$. On considère une boule fermée de rayon R contenant tous les x_i. Démontrer que

$$R \geqslant \sqrt{2\frac{n-1}{n}}.$$

---

11. Soient E un espace euclidien, p un projecteur de E. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) u est un projecteur orthogonal.

(ii) Pour tout $(x,y)\in E^2$, $(p(x)|y)=(x|p(y))$ (on dit que p est symétrique).

---

12. Soient E un espace euclidien, u une affinité de E. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) p est une affinité orthogonale.

(ii) Pour tout $(x,y)\in E^2$, $(u(x)|y)=(x|u(y))$ (on dit que u est symétrique).

---

13. Soient E un espace euclidien, $u\in\mathcal{L}(E)$. Vérifier l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) Pour tout $(x,y)\in E^2$, $(u(x)|y)=-(x|u(y))$ (on dit que u est antisymétrique).

(ii) Pour tout $x\in E$, $(x|u(x))=0$.

Qu'en déduit-on pour les valeurs propres (réelles) d'un endomorphisme antisymétrique?