HX3 2006/2007 - Introduction à la réduction des endomorphismes

1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $Q \in K[X]$ tels que $Q(u) = 0$. Montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $Q(\lambda) = 0$.

2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Donner un polynôme scindé à racines simples Q tel que $Q(u) = 0$ où u est une affinité de rapport λ, une projection, une symétrie.

Que dire de $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Q(u) = 0$ où Q est de degré 2, scindé à racines simples?

3. Calculer le polynôme caractéristique des matrices carrées de taille n suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & & b \\ \vdots & & & \ddots & \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La seconde matrice est appelée matrice compagnon du polynôme $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.

4. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, $(a, b, c, d) \in K^4$ avec a ou b différent de 0. On suppose que $cu + dI_E \in \mathrm{GL}\ (E)$ et on note $v = (au + bI_E) \circ (cu + dI_E)^{-1} = (cu + dI_E)^{-1} \circ (au + bI_E)$. Montrer :

$$\chi_v = \frac{1}{\det(cu + dI_E)}(a - cX)^n \chi_u \left(\frac{dX - b}{a - cX}\right)$$

5. On suppose que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & & b \\ \vdots & & & \ddots & \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1) Calculer J^0, J, J^2,..., J^n, puis diagonaliser J.
2) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & & & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & & a_3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Déterminer $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = Q(J)$, diagonaliser A et prouver en particulier que

$$\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1} \left[X - Q(e^{\frac{2ik\pi}{n}})\right] \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{i=0}^{n-1} Q(e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

7. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$.

1) Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

2) On suppose u est v diagonalisables. Vérifier l'existence d'une base de E où les matrices de u et v sont diagonales : c'est une base commune de diagonalisation de u et v.

---

8. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que u admet une valeur propre.

2) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

---

9. Soient E un K-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E stable par u. On considère $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ deux à deux distincts et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in \ker(u - \lambda_i I_E)$ et $\sum_{i=1}^n x_i \in F$. Montrer, en raisonnant par récurrence sur n, que chaque x_i est dans F.

---

10. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

1) Soit F un sous-espace de E stable par u. Montrer que

$$F = \bigoplus_{\lambda \in K} [F \cap \ker(u - \lambda I_E)]$$

et en déduire que F possède un supplémentaire stable par u.

2) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ un système libre de vecteurs propres de u. Montrer que l'on peut compléter ce système en une base de vecteurs propres de u.

---

11. Commutant d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples :

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que A est diagonale et que tous ses éléments diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que le commutant de A,

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(K),\ \ MA = AM\}$$

est $D_n(K)$ tout entier.

2) Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé sur K, à racines simples. Montrer que le commutant de u,

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ \ v \circ u = u \circ v\}$$

est l'ensemble $\{P(u) \in \mathcal{L}(E),\ P \in K[X]\}$.

---

12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

---

13. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont diagonalisables et $A^3 = B^3$. Montrer que $A = B$.

---

14. Soit G un groupe fini, $f : G \longrightarrow \mathrm{GL}\ (E)$ un morphisme de groupes, E $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour $g \in G$, on note $\Phi(g) = \mathrm{Tr}(f(g))$. Montrer que $\Phi(g^{-1}) = \overline{\Phi(g)}$.

---

15. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)$, K sous-corps de $\mathbb{C}$.

1) On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2) Soient $\mu \in K$, $P = \det(XB + \mu I_n - AB) - \det(XB + \mu I_n - BA) \in K[X]$. Montrer que, pour tout $\lambda \in K$, λ non valeur propre de A, on a $P(\lambda) = 0$. En déduire que $\chi_{AB}(\mu) = \chi_{BA}(\mu)$.

3) Conclure que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

---

16. Polynôme minimal : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1) On note $I_A = \{P \in K[X], P(A) = 0\}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme minimal μ_A unitaire tel que $I_A = \mu_A K[X]$. En déduire que μ_A est l'unique polynôme unitaire de degré minimal qui annule A.

μ_A est appelé polynôme minimal de A.

2) Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, μ_A est scindé à racines simples.

3) Montrer que les racines de A sont exactement les valeurs propres de A.

---

17. Théorème de Cayley-Hamilton : Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E. On désire prouver le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$.

1) On suppose que F est un sous-espace de E, stable par u. On note $u_F : x \in F \longmapsto u(x) \in F$, $u_F \in \mathcal{L}(F)$. Redémontrer que χ_{u_F} divise χ_u.

On fixe $x \in E$, $x \neq 0$.

2) Démontrer l'existence de $r \geqslant 1$ et d'une famille $(a_0, a_1, \dots, a_{r-1}) \in K^r$ tel que :
1. $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{r-1}(x))$ est un système libre.
2. $u^r(x) = a_{r-1}u^{r-1}(x) + \dots + a_2u^2(x) + a_1u(x) + a_0x$.
On note $F_x = \text{Vect } (x, u(x), u^2(x), \dots, u^{r-1}(x))$.
3) Montrer que F_x est le plus petit sous-espace de E, stable par u, contenant x. Quel est sa dimension?
On note $u_x = u_{F_x}$.
4) Déterminer le polynôme caractérisque de u_x, χ_{u_x}.
5) Montrer que $\left[\chi_{u_x}(u_x)\right](x) = 0$. En déduire $\left[\chi_u(u)\right](x) = 0$ et conclure.

---

18. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, K sous-corps de $\mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $Q \in K[X]$ tels que $Q(u) = 0$ et $Q \neq 0$.
1) Montrer que toute valeur propre de u est racine de Q.
2) Montrer que tout diviseur irréductible de χ_u divise Q (on considèrera un surcorps commutatif de K où χ_u est scindé et raisonner sur une matrice représentative de u).
3) En déduit-on sur χ_u lorsque $Q = X^p$?

---

19. Déterminer les suites $(X_n) = \left(\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $AX_n = X_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; \; A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} ; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$