HX3 2006/2007 - Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{Z}$ tels que $A^2 + B^2 = \prod_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$. Expliciter A et B dans le cas où $n = 2$.

2. Soient $P = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m\, z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Montrer que $f : z \in P \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i} \in D$ est une bijection.

3. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un morphisme de corps laissant $\mathbb{R}$ invariant. Montrer alors que f est l'identité ou la conjugaison.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq -i$. Montrer l'équivalence : $\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left| \dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i} \right| = 1$

5. Soit z et z' deux complexes de module 1 avec $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

6. Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe

$$Z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}.$$

Calculer Z^3.

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x

1) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$;
2) $\sin x + (1+\sqrt{2})\cos x - 1 = 0$;
3) $a\cos(2x) = 4\sin x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Linéariser l'expression $\cos^7 x$.
2) Exprimer $\sin(9x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ky)$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+ky)$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(x+ky)$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(x+ky)$.

10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \cos(ky)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \sin(ky)$

11. 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2kx$.

2) En déduire $\cos^2 \dfrac{\pi}{14} + \cos^2 \dfrac{3\pi}{14} + \cos^2 \dfrac{5\pi}{14}$.

12. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'équation $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

13. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $z \in \mathbb{C}$ la relation $\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1)$.

14. Calculer le produit des racines n-ième le l'unité.

15. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

16. Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^2 = -7 + 24i$;
2) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$;
3) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$;
4) $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations en z suivantes :

1) $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

2) $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

---

18. 1) Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{z^2} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1$$

2) Déterminer les racines complexes Z de l'équation : $Z^2+Z-1=0$. Puis résoudre l'équation en z : $1+z+z^2+z^3+z^4=0$.

3) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et de $\sin\frac{\pi}{5}$.

---

19. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que pour $n \geqslant 2$

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}-nz^n = 0 \implies |z| \leqslant 1.$$

---

20. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes $A = \displaystyle\sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} C_n^{3k}$, $B = \displaystyle\sum_{0\leqslant 3k+1\leqslant n} C_n^{3k+1}$ et $C = \displaystyle\sum_{0\leqslant 3k+2\leqslant n} C_n^{3k+2}$.

---

21. 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \notin (\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$. Vérifier la formule :

$$\frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha} = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} (-1)^k C_n^{2k+1} \tan^{2k+1}\alpha$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation en x suivantes ($p \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_{2p+1}^{2k+1} x^{2k} = 0, \quad \text{puis} \quad \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^{2k+1} x^{2k} = 0$$

---

22. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $\cos a+\cos b+\cos c = \sin a+\sin b+\sin c = 0$. Montrer que $\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c = \sin 2a+\sin 2b+\sin 2c = 0$.

---

23. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{I}m\, z > 0$. Montrer que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{t-z}{t-i}\right| = \frac{2\mathcal{I}m\, z}{|z+i|+|z-i|}.$$

---

24. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que :

$$\frac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right|}{1+\left|\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1+|z_k|}$$

---

25. 1) Montrer que pour tout $(z,u) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$|z+u|^2 + |z-u|^2 = 2(|z|^2+|u|^2)$$

2) Soit $(z,z',u) \in \mathbb{C}^3$ tel que $zz' = u^2$. Prouver :

$$\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right| = |z|+|z'|$$

---

26. **Inégalité de Ptolémée :**

1) Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^{*2}$, $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\dfrac{|a-b|}{|a|.|b|}$.
2) Montrer que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$, $|x|.|y-z|\leqslant|y|.|z-x|+|z|.|x-y|$.
3) En déduire pour $(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4$, l'inégalité de Ptolémée :

$$|x-y|.|z-w|\leqslant|x-z|.|y-w|+|x-w|.|y-z|$$

---

27. Soit $x\in[0,1]$. Vérifier les relations

$$\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arccos x \text{ et } \arccos\sqrt{1-x^2}=\arcsin x$$

---

28. 1) Soient x et y dans $[0,1]$. Vérifier les relations

$$\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})=\arcsin x-\arcsin y \quad\text{et}\quad \arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})=\arccos x+\arccos y$$

2) Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$. Vérifier la relation

$$\arctan\frac{x-y}{1+xy}=\arctan x-\arctan y$$

3) Déduire de la question précédente la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

---

29. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z=x+iy\notin\mathbb{R}_-$. Montrer que l'argument principal de z est donné par :

$$2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

---

30. Soit treize réels distincts. Montrer qu'il en existe deux parmi eux, x et y tels que :

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<2-\sqrt{3}$$

On pensera à la fonction tangente.

---

31. Soit A,B,C trois points non alignés et M un point de $\mathcal{P}$. Montrer que M est le barycentre des points A,B,C affectés respectivement des coefficients $[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}]$, $[\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}]$, $[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}]$. En déduire les coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A,B,C).

---

32. Quel est l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z+\bar{z}=|z|$?

---

33. Déterminer les nombres complexes z tels que z, $1/z$ et $1-z$ aient le même module.

---

34. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des translations et des homothéties de rapport non nul d'un plan $\mathcal{P}$. Montrer $\mathcal{H}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

---

35. Dans un triangle ABC, on considère I le milieu de B et C. Une droite variable passant par I coupe (AB) et (AC) en D et E respectivement. Quel est le lieu des points d'intersection des droite (BE) et (CD) (on prendra $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ comme repère).

---

36. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de $\mathbb{C}$. Deux points M et M' décrivent respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de telle sorte que la tangente à $\mathcal{C}$ en M et la tangente à $\mathcal{C}'$ en M' soient orthogonales. Trouver le milieu du segment $[MM']$.

---

37. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé, on considère les droites d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0, \quad ax + by = \sqrt{3}(bx - ay), \quad ax + by = -\sqrt{3}(bx - ay).$$

Montrer que ces trois droites sont les côtés d'un triangle équilatéral.

---

38. Soit $(A, B, C, M) \in E^4$. On note A', B', C' les symétriques de M par rapport à $\frac{B+C}{2}$, $\frac{C+A}{2}$ et $\frac{A+B}{2}$ respectivement. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

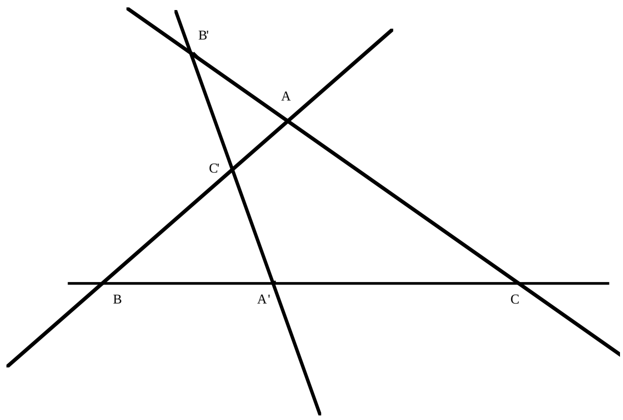
---

39. **Théorème de Ménélaüs :** Soient (ABC) un triangle (i.e. trois points non alignés) de E, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, distincts des sommets. Si M, P, Q sont alignés avec $M \neq P$, on note $\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}$ l'unique scalaire tel que

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}} \overrightarrow{MP}$$

Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \quad \text{(Théorème de Ménélaüs)}$$



---

40. **Droite et cercle d'Euler :** Soit (ABC) un triangle. On note G son isobarycentre, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.

1) Démontrer que G, O et H sont alignés et plus précisément $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

2) Montrer que $O = G$ si, et seulement si, ABC est un triangle équilatéral.

Dans les conditions contraires, $O \neq G$ et la droite (OG) est appelée *droite d'Euler*.

3) Montrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit.

4) Montrer que le cercle passant par les trois pieds des hauteurs, passe également par les pieds des médianes et les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets A, B et C : c'est le *cercle des* 9 *points* ou encore le *cercle d'Euler*.

---

41. Soit (abc) un triangle.

1) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) (a, b, c) forme un triangle équilatéral direct ;

(ii) $a + jb + j^2 c = 0$;

2) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) (a, b, c) forme un triangle équilatéral ;

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

---

42. Soit (ABC) un triangle du plan euclidien orienté $\mathcal{P}$. On note $\widehat{A}$ la mesure de l'angle non orienté des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $a = BC$. On définit de manière analogue $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, b et c.

1) Montrer que les déterminants $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]$, $[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$ sont égaux. On dit que (ABC) est orienté positivement s'ils sont positifs, négativement sinon.

2) Montrer que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est égale à $\widehat{A}$ si (ABC) est orienté positivement, $-\widehat{A}$ sinon.

3) Démontrer que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

4) On note p le demi-périmètre $\frac{1}{2}(a + b + c)$, R le rayon du cercle circonscrit et S l'aire de (ABC).

a. Montrer que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$$

b. Montrer que

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

---

43. $*$ On reprend les notations de l'exercice précédent. Soit (ABC) un triangle du plan euclidien. Montrer que l'aire S de (ABC) vérifie

$$S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}},\quad S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3} \quad \text{et} \quad S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2,$$

avec égalité si, et seulement si (ABC) est équilatéral.

---

44. Dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$, on considère (ABC) un triangle positivement orienté ne possédant pas d'angle de mesure principale strictement supérieure à $\frac{2\pi}{3}$. Soit f l'application qui à un point M associe $f(M) = AM + BM + CM$.

Le but de l'exercice est de prouvé que f admet un minimum atteint en un unique point de $\mathcal{P}$ appelé *point de Fermat de* (ABC).

1) On construit le triangle équilatéral (BCA') extérieur à (ABC), le cercle $\mathcal{C}_A$ circonscrit à (BCA'). Montrer que la droite (AA') recoupe $\mathcal{C}_A$ en un point F différent de A', situé entre A et A' et que les points A', B, F et C sont disposés dans cet ordre sur $\mathcal{C}_A$.

2) Montrer que $MB + MC \geqslant MA'$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque M appartient à l'arc de $\mathcal{C}_A$, compris entre B et C et ne contenant pas A'.

3) Montrer que $f(M) > AA'$ pour tout $M \neq F$ et qu'ainsi f atteint son minimum en F et seulement en ce point.

4) On construit comme ci-dessus les triangles équilatéraux (CAB') et (ABC') ainsi que leur cercle circonscrit $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$. Montrer que F est le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC') et qu'il appartient aux cercles $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$.

---

45. Quels sont les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme ?

---

46. Soit A, B, C, D des points du plan $\mathcal{P}$. On suppose que les droites (AC) et (BD) se coupent en J et que les droites (AB) et (CD) se coupent en H. Montrer l'équivalence

$$\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JB}\overrightarrow{JD} \iff \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HD}$$