# Mathématiques

# Devoir en temps libre N$^o$9

A remettre le lundi 24 avril 2005

## Problème 1 : théorème de Gauss-Lucas

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \in \mathbb{C}[X]$.

**1) a.** Montrer que

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_i}$$

**b.** Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1 - \alpha_i}$ lorsque $\alpha_1$,..., $\alpha_5$ sont les racines distinctes ou confondues de $X^5 + 2X^4 - X - 1$.

**2) a.** Montrer que les racines de $P'$ s'écrivent comme barycentre à coefficients positifs des racines de $P$.

**b.** Montrer que si $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$, $P'$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

On suppose désormais $P$ scindé sur $\mathbb{R}$ .

**3)** Etablir que $(P')^2 - PP'' \geqslant 0$.

**4)** On écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer que si $1 \leqslant k \leqslant n-1$ :

$$a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$$

## Problème 2 : polynôme des Tchebychev

On considère la suite des polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

**I. 1)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

**a.** Montrer que $\deg T_n = n$ et calculer le coefficient dominant de $T_n$.

**b.** Etudier la parité de $T_n$.

**c.** Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

**d.** On fixe $x \in \mathbb{R}$. Calculer $T_n(x)$ en fonction de $x$ et $n$ en distinguant les cas $|x| < 1$, $|x| = 1$ et $|x| > 1$.

**2) a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos\theta) = \cos n\theta$ (on n'utilisera pas les questions précédentes).

**b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

**c.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $T_n$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$P(\cos\theta) = \cos n\theta$$

**d.** Déterminer les racines de $T_n$.

**e.** Déterminer les racines de $T_n'$.

**3)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}$ et $T_n$ sont premiers entre eux.

**II.** On considère l'application :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' + XP' \end{array}$$

On notera

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg P \leqslant n\}$$

**1) a.** Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Psi(X^k)$.

**b.** En déduire $\ker\Psi$.

**2)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\Psi_\lambda = \Psi - \lambda I_{\mathbb{R}[X]}$.

**a.** On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\Psi_\lambda(P) = 0$. Démontrer que $\lambda$ est le carré d'un entier.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\Psi_{n^2}(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P \neq 0$ tel que $\Psi_{n^2}(P) = 0$.

**c.** Démontrer que $\Psi_{n^2}(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**d.** En déduire la dimension de $\ker\Psi_{n^2|\mathbb{R}_n[X]}$, puis celle de $\ker\Psi_{n^2}$.

**3) a.** En utilisant I.2)a, montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$(x^2-1)T_n'' + xT_n'(x) = n^2 T_n(x)$$

**b.** En déduire que

$$(X^2-1)T_n'' + XT_n' = n^2 T_n$$

**c.** Préciser $\ker\Psi_{n^2}$.

**d.** Pourquoi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une base de $\mathbb{R}[X]$? Montrer que

$$\text{im } \Psi = \text{Vect } (T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots) = \text{Vect }_{n\in\mathbb{N}^*}(T_n)$$

**III.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n$. On suppose que le coefficient dominant de $P$ est $2^{n-1}$ et que pour tout $x \in [-1,1]$, $P(x) \in [-1,1]$. On note $Q = T_n - P$ et pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$.

**1) a.** Calculer pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $T_n(x_k)$.

**b.** Soit $0 \leqslant k < n$. Comparer les signes de $Q(x_k)$ et $Q(x_{k+1})$.

**c.** En déduire que $Q$ possède au moins $n$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité dans $[-1,1]$, puis que $Q=0$.

**2)** Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire non nul, de degré inférieur ou égal à $n$. Démontrer par l'absurde que :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |R(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

A quelle condition y a-t-il égalité?

## Problème 3 : théorème des deux carrés

**I.** Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier.

**1)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$

$$x^{p-1} = 1$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x^p = x$ (petit théorème de Fermat).

**2)** Montrer qu'il y a dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\frac{p+1}{2}$ carrés. Préciser ces carrés lorsque $p = 13$.

**3)** Montrer que si $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ :

$$x^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$$

En déduire que $x$ est un carré non nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

**4)** Montrer que $-1$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$.

**II.** On note $S$ l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ somme de deux carrés entiers.

**1)** Prouver que $S$ est stable par multiplication.

**2)** Montrer que $2 \in S$.

**3)** Soit $p$ un nombre premier congru à 1 modulo 4 et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 \equiv -1 \pmod p$.

**a.** En utilisant le principe de Dirichlet, montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$0 < b < \sqrt{p} \quad \text{et} \quad \left| b\frac{n}{p} - a \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$$

**b.** Montrer que $(bn - ap)^2 + b^2 = p$.

**4)** En déduire que $S$ contient les entiers $n$ tels que pour tout nombre premier $p$ congru à 3 modulo 4, la valuation $p$-adique est paire.

**III.** Soit $n \in S$ que l'on écrit $n = a^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. On considère $p$ un nombre premier congru à 3 modulo 4.

**1)** En utilisant la première partie, démontrer que $p$ divise $a$ et $b$.

**2)** En déduire par récurrence que la valuation $p$-adique de $n$ est paire.

**3)** Conclure en donnant les éléments de $S$