HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}8

À remettre le mercredi 29 mars 2006

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit pour la base canonique de cet espace, ce qui autorise à considérer l'image $\operatorname{im} A$ et le noyau $\ker A$ de la matrice.

On admettra les règles de calculs sur les matrices par blocs : si $(A, A') \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $(B, B') \in \mathcal{M}_{r,n-r,(}\mathbb{R})$, $(C, C') \in \mathcal{M}_{n-r,r,(}\mathbb{R})$ et $(D, D) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $A \in \mathrm{GL}\,_r(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{GL}\,_{n-r}(\mathbb{R})$. Dans ces conditions :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

On considère $\mathcal{G}$ un groupe multiplicatif non réduit à $\{0\}$, et contenu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souligne qu'en général $\mathcal{G}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}\,_n(\mathbb{R})$ et peut contenir des matrices de rang $r < n$. Cependant toute matrice $A \in \mathcal{G}$ admet pour la multiplication des matrices un inverse dans $\mathcal{G}$; on notera A' cet inverse. Autrement dit, il existe dans $\mathcal{G}$ un élément neutre E, éventuellement différent de I_n, et tel pour tout $A \in \mathcal{G}$, on ait $AE = EA = A$ et $AA' = A'A = E$.

1) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

2) Montrer que les matrices de $\mathcal{G}$ ont le même rang $r \geqslant 1$.

3) a. Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{im} E \oplus \ker E$.

b. Montrer que si $r < n$, E est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Que vaut E si $r = n$.

c. En déduire que si $r < n$, toute matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathrm{GL}\,_r(\mathbb{R})$. Pour chaque entier $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, caractériser les groupes $\mathcal{G}$ de matrices de rang r à l'aide des sous-groupes de $\mathrm{GL}\,_r(\mathbb{R})$.

4) a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Etablir l'équivalence des cinq propositions suivantes :

(i) A appartient à un groupe multiplicatif $\mathcal{G}$.

(ii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2$.

(iii) $\operatorname{im} A = \operatorname{im} A^2$.

(iv) $\ker A = \ker A^2$.

(v) $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \operatorname{im} A$.

b. Donner, pour $n = 2$, un exemple de matrice non nulle n'appartenant à aucun groupe multiplicatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Montrer que pour que les cinq propositions du **3)** soient vérifiées, il faut et il suffit qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AX = XA, \quad X^2A = X \quad \text{et} \quad A^2X = A$$

d. Etablir dans ce cas que la matrice X est unique.

e. Comparer X à A' et en déduire avec les notations du **2) c.** que A' est semblable à :

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour A fixé, A' dépend-il du groupe auquel A appartient?

5) a. Soit $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ avec $r < n$. Montrer que B appartient à un groupe multiplicatif de matrices et que B' est de la forme $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où l'on calculera $C_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ et C_2 en fonction de B_1 et B_2.

b. Calculer A' pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.