



Mathématiques

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N°7

À remettre le lundi 20 février 2006

Les trois exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1 :

On considère l'arc Φ d'un plan affine euclidien orienté \mathcal{P} défini par

$$x(t) = 2t + t^2 \quad \text{et} \quad y(t) = 2t - \frac{1}{t^2}.$$

- 1) Dresser le tableau de variations.
- 2) Réperer et donner la nature des points stationnaires.
- 3) Étudier les branches infinies.
- 4) Un tracé rapide suggère un point double. Déterminer ce point double.
- 5) Tracer soigneusement l'arc Φ .

Exercice 2 :

Étudier et tracer la courbe donnée par la représentation polaire $\rho = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$.

Exercice 3 :

Dans ce problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note (E_n) l'équation définie pour $x > 0$ par $\frac{\ln(x)}{x} + x = n$.

- 1) **a.** Démontrer que (E_n) possède une unique solution $x_n > 1$.
b. Démontrer que pour $n \geq 2$, $n - 1 \leq x_n \leq n$.
- 2) **a.** Quelle est la limite de x_n ? Donner un équivalent simple de x_n .
b. Trouver un équivalent simple de $x_n - n$. En déduire un développement asymptotique de x_n de deux termes.
c. Écrire un développement asymptotique de x_n de trois termes.

Problème : la méthode de Newton

On s'intéresse dans ce problème à des méthodes itératives de recherche de valeur approchée d'équation du type $f(x) = 0$.

I. Première partie :

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que

1. $f(a) < 0$ et $0 < f(b)$;
2. $f' > 0$;
3. $f'' > 0$.

1) Justifier l'existence d'un unique $l \in]a, b[$ tel que $f(l) = 0$.

2) On pose $u_0 = b$ et on considère le point de coordonnées $(u_1, 0)$ correspondant à l'intersection de l'axe des x avec la tangente à la courbe de f issue du point d'abscisse $u_0 = b$.

a. Faire une figure représentative.

b. Exprimer u_1 en fonction de u_0 .

c. Par des arguments de convexité, démontrer que $u_1 \in]l, u_0[$.

On construit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: le point de coordonnées $(u_{n+1}, 0)$ correspond à l'intersection de l'axe des x avec la tangente à la courbe de f issue du point d'abscisse u_n .

3) Faire apparaître $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme une suite F -récurrente avec F à préciser.

4) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Cette suite offre des approximations de la solution de l'équation $f(x) = 0$: c'est la *méthode de Newton*.

6) Démontrer avec toutes les justifications nécessaires qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, F -récurrente avec $U_0 \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

II. Deuxième partie :

On reprend les notations de la première partie.

1) a. Démontrer l'existence de $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \geq m$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $c \in]l, u_n[$ tel que

$$f(u_n) + (l - u_n)f'(u_n) + \frac{f''(c)}{2}(l - u_n)^2 = 0.$$

c. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - l| \leq \frac{M}{2m}|u_n - l|^2.$$

On pose $K = \frac{M}{2m}$ et $v_n = K|u_n - l|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $n \geq 1$. Majorer v_n en fonction de v_{n-1} , puis en fonction de v_0 et n .

3) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose $v_0 < 1$. À partir de quel rang n_0 aura-t-on $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Commenter ce résultat.

III. Troisième partie :

Soit $a = 1 < \alpha < b$, $f : x \in [1, b] \mapsto x^2 - \alpha$.

1) Vérifier que f satisfait aux conditions données à la première partie.

2) Exprimer la relation de récurrence que vérifie la suite définie par la méthode de Newton pour trouver le zéro de f (voir I.).

3) Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{\alpha}$.

4) Prouver pour que $n \geq 0$

$$|u_{n+1} - \sqrt{\alpha}| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}|u_n - \sqrt{\alpha}|^2$$

- 5) Quel rang n_0 fournit une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-15} près ?
- 6) Écrire une procédure baptisée *newton* qui prendra en argument, f , x , b et un entier d et qui renverra le premier entier n tel que $|u_n - u_{n-1}| \leq 10^{-d}$ ainsi que la valeur u_n .

IV. Quatrième partie :

Soit $\alpha > 0$. On considère désormais une fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \alpha - \frac{1}{x}$.

- 1) Calculer pour $x > 0$, $F(x)$ associé à la fonction f comme en **I. 3**).
- 2) Montrer que $]0, 2/\alpha[$ est le plus grand intervalle de \mathbb{R}_+^* stable par F .

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ F -récurrente.

- 3) Montrer que si $0 < u_0 < 2/\alpha$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?
- 4) On prolonge F en une fonction polynômiale sur \mathbb{R} tout entier. Que se passe-t-il si $u_0 = 0$, $u_0 = 2/\alpha$ et $u_0 \notin [0, 2/\alpha]$?