HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}6

À remettre le vendredi 26 janvier 2006

Les deux problèmes sont indépendants.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose qu'il existe M_0 et M_2 dans $\mathbb{R}_+$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant M_0 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant M_2.$$

1) En écrivant la formule de Taylor-Lagrange entre un point x et un point $x+t$, démontrer que f' est bornée. Exprimer un majorant en fonction de M_0 et M_2. Ce majorant est-il encore valable si l'intervalle de définition n'est plus $\mathbb{R}$?

2) En écrivant la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+t$, puis entre x et $x-t$, démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

Problème 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) De quelle forme est la dérivée n-ième de f sur $\mathbb{R}^*$?

3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.