HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}5

À remettre le mercredi 4 janvier 2006

Les deux problèmes sont indépendants.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 :

On rappelle les résultats suivants : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}_+$.

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si, et seulement si, il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $N \geqslant 0$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant M$$

Dans le cas contraire, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = +\infty$$

• On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge aussi. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge aussi. Cela reste vrai si $u_n \leqslant v_n$ seulement à partir d'un certain rang.

I. Comparaison de restes et de sommes partielles de séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n>0}$ une suite de $\mathbb{R}$ et $(v_n)_{n>0}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que lorsque n tend vers l'infini, $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge.

2) On suppose que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge. On note pour tout $n \geqslant 1$:

$$R_n = \sum_{p=n}^{+\infty} u_p \quad \text{et} \quad R'_n = \sum_{p=n}^{+\infty} v_p$$

En déduire que lorsque n tend vers l'infini :

$$R_n \sim R'_n$$

3) On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge. On note pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{p=0}^{n} v_p$$

a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left| \frac{S_n}{S'_n} - 1 \right| \leqslant \frac{|S_{n_0} - S'_{n_0}|}{S'_n} + \varepsilon$$

b. En déduire que lorsque n tend vers l'infini :

$$S_n \sim S'_n$$

4) Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite réelle convergente vers un réel $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Déduire de ce qui précède qu'au voisinage de l'infini :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \sim na$$

Quel théorème retrouve-t-on ainsi?

II. Constante d'Euler et développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Pour tout $n > 0$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(u_n - \frac{1}{n})_{n>0}$ sont adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n>0}$ converge vers un réel $\gamma > 0$.

γ est la constante d'Euler. $0,577215$ est une valeur approchée de γ par défaut. On sait peu de choses de γ; notamment, on ignore encore si γ est rationnelle.

2) a. Donner un équivalent simple de $u_n - u_{n+1}$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire :

$$u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (u_p - u_{p+1}) \quad \text{converge et préciser} \quad \sum_{p=n}^{+\infty} (u_p - u_{p+1}), \quad \text{ainsi que} \quad \sum_{p=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$$

c. A l'aide du **I.**, établir qu'au voisinage de l'infini :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3) On pose pour $n > 0$

$$v_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$$

a. Vérifier que si n tend vers l'infini :

$$v_{n+1} - v_n \sim \frac{1}{6n^3}$$

b. Déterminer $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{C}{n^3} \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

c. En déduire que lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

4) On pose pour tout $n \geqslant 0$:

$$w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}$$

Trouver des équivalents simples de $w_{n+1} - w_n$ et de $\dfrac{1}{n^4} - \dfrac{1}{(n+1)^4}$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire que lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Problème 2 :

On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants : si H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, alors H est dense ou il existe $a \geqslant 0$ tel que $H = a\mathbb{Z}$. D'autre part, une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ s'annulant en une infinité de points est identiquement nulle. Enfin, π est irrationnel.

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)\}$ l'ensemble des périodes de f.

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si f est continue, $\mathcal{T}$ est fermé.

3) On suppose f continue non constante et $\mathcal{T} \neq \{0\}$. Vérifier l'existence de $a > 0$ tel que $\mathcal{T} = a\mathbb{Z}$.

4) Que peut-on dire d'une fonction continue qui admet 1 et $\sqrt{2}$ comme période?

5) Construire une fonction de R dans R admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme période.

6) Démontrer que si $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions polynomiales telles que $P(x - \mathrm{E}(x)) = Q(\cos x)$, alors $P = Q = 0$.