HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}4

À remettre le lundi 28 novembre 2005

Les quatre problèmes sont indépendants.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 :

Dans ce problème, U désigne l'ensemble des complexes de module 1 et si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \{z \in U, \quad z^n = 1\}$$

On admettra que π est irrationnel.

I. Soient H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$ et $H_+ = H \cap \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que H_+ est non vide.

2) On suppose que H_+ possède un plus petit élément a. Montrer que $H = a\mathbb{Z}$

3) On suppose que H_+ ne possède pas de plus petit élément. Montrer que $\inf H_+ = 0$ et en déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

4) Donner un exemple de sous-groupe de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ et distinct de $\mathbb{R}$.

II. Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

1) On suppose que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{p}$ avec $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $\mathrm{pgcd}(n,p) = 1$. Montrer que $H = \dfrac{a}{n}\mathbb{Z} = \dfrac{b}{p}\mathbb{Z}$.

2) On suppose que $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer alors que H est dense dans $\mathbb{R}$.

III. Une partie B du cercle trigonométrique U est dite dense dans U si : pour tout $z \in U$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in B$ tel que $|z - b| \leqslant \varepsilon$. On admettra que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|$.

2) Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$. Montrer que e^{iA} est dense dans U.

3) Montrer que $e^{i\pi\mathbb{Q}} = \{e^{i\pi q} \in U, q \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-groupe dense de U de cardinal infini tel que tout élément est d'ordre fini.

IV. Soient $a > 0$, $G = e^{ia\mathbb{Z}}$.

1) On suppose que $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et on prend $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\dfrac{a}{2\pi} = \dfrac{n}{p}$ et $\mathrm{pgcd}(n,p) = 1$. Montrer que $G = U_p$.

2) On suppose que $\dfrac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que G est dense dans U.

V. Le but de cette partie est de démontrer la densité des suites $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'intervalle $[-1, 1]$.

1) Montrer que $(\cos n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1.1]$ (i.e. pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\cos n - x| \leqslant \varepsilon$). Même question avec $(\sin n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2) a. Démontrer que si $A \subset [-1,1]$ est dense dans $[-1,1]$, pour toute partie F finie, $A\backslash F$ est encore dense dans $[-1,1]$.

b. Démontrer que $(\cos n)_{n\geqslant n_0}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Déduire de la question précédente que la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$ (si $|\sin n_0 - l| \leqslant \varepsilon$ avec $n_0 < 0$, on considèrera le développement de $\sin(n_0 + N)$ où $N > -n_0$).

VI. Soient G un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n. Prouver que $G = U_n$.

Problème 2 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien orienté.

1) Soit A, B deux points distincts de $\mathcal{P}$. Démontrer que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

2) Soient $T = (A, B, C)$ un triangle de $\mathcal{P}$, $M \in \mathcal{P}$. Vérifier l'équivalence des conditions suivantes :

(i) Les projetés orthogonaux de M sur (BC), (CA) et (AB) sont alignés (ils définissent alors la droite de Simson de M).

(ii) M est sur le cercle circonscrit à T.

Problème 3 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien orienté.

1) Quelle est la nature géométrique de la composée de trois rotations d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$?

2) Sur les cotés d'un triangle (ABC) de $\mathcal{P}$ et extérieurement à celui-ci, on construit trois triangles équilatéraux. Montrer que les isobarycentres de ces trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral (on considèrera la composée des trois rotations de centres les isobarycentres et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$).

Problème 4 :

Pour quatre points deux à deux distincts de $\mathcal{P}$ identifié à $\mathbb{C}$, A, B, C, D d'affixes respectives a, b, c et d, on définit le birapport par :

$$[a,b,c,d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

1) Montrer que le birapport de quatre points est réels si, et seulement si, ces quatre points sont cocycliques ou alignés.

2) Soient A, B, M et M' distincts dans $\mathcal{P}$ d'affixes a, b, z, z'. On suppose que $[a,b,z,z'] = -1$. On note I le milieu de A et B. Soient m et m' les affixes respectives de $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$. Exprimer mm' a l'aide de a et b. En déduire que (AB) est bissectrice de (IM) et (IM') et prouver :

$$IM.IM' = \frac{1}{4}AB^2$$