HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}2

À remettre le vendredi 7 octobre 2005

Les trois problèmes sont indépendants.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 :

Le but de ce problème est de dénombrer les surjections entre deux ensembles finis. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $E_n = [\![1, n]\!]$ $(E_0 = \emptyset)$. Si n et p sont des entiers positifs ou nuls, $S_{n,p}$ désignera le nombre de surjections de E_n sur E_p.

I. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$.

1) Que vaut $S_{n,p}$ si $p > n$? Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, $S_{n,2}$.

2) Calculer $S_{p+1,p}$.

II. Soient $p \leqslant n$.

1) Démontrer que si $0 \leqslant k < p$, $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q C_p^q C_q^k = 0$.

2) Etablir $p^n = \displaystyle\sum_{q=1}^{p} C_p^q S_{n,q}$.

3) En déduire la formule

$$S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^{p} (-1)^k C_p^k k^n$$

4) En déduire que si $p \geqslant 2$ $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$. Vérifier que

$$S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}.$$

III. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $A_{n,p}$ le nombre de partitions de E_n en p parties non vides (sans tenir compte de l'ordre) : $A_{n,p}$ est appelé *nombre de Stirling de deuxième espèce.*

1) Quelle relation y a t-il entre $A_{n,p}$ et $S_{n,p}$?

2) En déduire une relation donnant $A_{n,p}$ en fonction de $A_{n-1,p}$ et $A_{n-1,p-1}$.

3) Calculer $A_{n,1}$ et $A_{n,n}$.

IV. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle dérangement de E_n toute permutation σ de E_n telle que $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in E_n$. On note D_n le nombre de dérangements de E_n. On pose $D_0 = 1$.

1) Etablir $n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$.

2) A l'aide du II.1), en déduire

$$D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k!$$

Problème 2 :

Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement. On suppose que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$.

1) Montrer que G est abélien.

2) Soient H un sous-groupe de G et $a \in G \backslash H$.

a. Montrer que $H \cap aH = \emptyset$, et que $H \cup (aH)$ est un sous-groupe de G.

b. Si H est fini, quelle relation existe t-il entre le cardinal de H et le cardinal de $H \cup aH$?

3) On suppose G fini. Montrer que le cardinal de G est puissance de 2.

4) Exhiber un tel groupe de cardinal 2, puis 4 et finalement 2^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 3 :

Les lois des groupes considérés dans ce problème sont notées additivement.

I. **1)** Que peut-on dire des sous-groupes de $\mathbb{Z}$?

2) Soit G un groupe monogène infini. Démontrer que tout sous-groupe H de G est monogène. En déduire qu'il existe $e \in G$ tel que $H = \mathbb{Z}.e = \{k.e, k \in \mathbb{Z}\}$.

II. On rappelle que $\mathbb{Z}^2$ est muni d'une structure de groupes pour la loi définie par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{où } (a, b) \text{ et } (c, d) \in \mathbb{Z}^2.$$

On rappelle que si $k \in \mathbb{Z}$, $k.(a, b) = (ka, kb)$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène.

Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. On considère $f : (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \longmapsto y \in \mathbb{Z}$.

2) Montrer que f est un morphisme de groupes.

3) On suppose que $f(H) = \{0\}$. Démontrer alors que H est monogène en utilisant le **I.**

On suppose désormais que $f(H) \neq \{0\}$.

4) Démontrer l'existence de $e_1 = (a, b) \in H$, $b \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $X \in H$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $X - k.e_1 \in \ker f$.

5) Démontrer l'existence de $e_2 \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ tel que $\mathbb{Z}.e_2 = H \cap \ker f = H \cap (\mathbb{Z} \times \{0\})$.

6) Démontrer que $H = \mathbb{Z}.e_1 + \mathbb{Z}.e_2$.

7) Montrer que H est monogène si, et seulement si $e_2 = 0$.