HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}10

A remettre le mercredi 17 mai 2006

Problème 1 : théorème de Bernstein

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $I = [a,b[$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times I$, on a $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a $0 \leqslant R_n(x) \leqslant f(x)$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in I^2$ tel que $a < x < y$. On définit $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour $t \in I$:

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$h(t) = f(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(y-t)^k$$

a. Vérifier que g et h sont dérivables et que pour tout $t \in [a,x]$, on a

$$\frac{g'(t)}{(x-a)^n} \geqslant \frac{h'(t)}{(y-a)^n}$$

b. En déduire que

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \leqslant \frac{R_n(y)}{(y-a)^n}$$

3) En conclure que pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

4) Montrer que lorsque x tend vers b dans I, $f(x)$ tend vers une limite l finie ou infinie. Montrer que dans le cas où l est fini

$$l = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

Problème 2 : formule de Stirling

I. Première partie :

On pose $U_n = \ln n! - n \ln n + n - \dfrac{1}{2} \ln n$ pour $n \geqslant 1$.

1) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de $\left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

2) Déterminer $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $U_{n+1} - U_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{a}{n^2}$.

3) En déduire que la convergence de U_n.

4) Conclure qu'il existe $K > 0$ tel que $n! \underset{n \to \infty}{\sim} K \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

5) Exprimer un équivalent de C_{2n}^n en fonction de n et K.

II. Deuxième partie :

On note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Etablir pour $n \geqslant 2$ la relation $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

2) Vérifier que la suite nI_nI_{n-1} est constante.

3) En déduire un équivalent de I_n.

4) Calculer I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p (on fera apparaître $C_{2p}^p = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2}$).

5) Déterminer un équivalent de C_{2n}^n lorsque n tend vers l'infini.

6) Conclure que la constante K de la première partie est $\sqrt{2\pi}$.

On a démontré la formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}.$$