HX3 Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ N^{o}8

Samedi 25 mars 2006

- Durée : 4 heures -

Les trois problèmes sont totalement indépendants.

On laissera une marge à gauche. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte. Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 : théorème de Maschke

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, G un sous-groupe fini du groupe linéaire GL (E), F un sous-espace de E. On suppose que F est laissé stable par tous les isomorphismes g de G i.e. $g(F) \subset F$. On considère q un projecteur de E d'image F et on pose

$$p = \frac{1}{\mathrm{Card} G} \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}.$$

1) Montrer que si $x \in F$, $p(x) = x$.
2) Démontrer que p est un projecteur d'image F.
3) Soit $g_0 \in G$. Démontrer que $p \circ g_0 = g_0 \circ p$.
4) Conclure que $\ker p$ est un supplémentaire de F stable par tous les éléments g de G.

Problème 2 : exponentielle de matrices

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dira simplement *matrice* pour matrice carrée de $\mathbb{K}$ de taille 2. On considère une suite de matrice $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et l'on écrit pour $p \in \mathbb{N}$, $M_p = \begin{pmatrix} a_p & b_p \\ c_p & d_p \end{pmatrix}$. On dit que M_p converge vers $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si les suites a_p, b_p, c_p et d_p convergent respectivement vers a, b, c et d.

On appelle *norme de* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le réel positif $\|M\| = \max(|a|, |b|, |c|, |d|)$.

Enfin, on rappelle que si $z \in \mathbb{C}$, $\exp z = e^z = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!}$ et cela définit une application surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\det M = ad - bc$. Le déterminant vérifie pour toutes matrices M et N, $\det(MN) = \det M \det N$. Une matrice M est inversible si, et seulement si $\det M \neq 0$.

Préliminaires :

1) Démontrer que si $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergentes de matrices vers M et N respectivement, alors le produit M_pN_p converge vers MN.

Que dire dans ces conditions des suites $M_p + N_p$ et λM_p ?

2) Soit M et N deux matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$. Que peut-on dire de $\|M + N\|$, puis $\|\lambda M\|$ en fonction de $\|M\|$ et $\|N\|$?

I. Première partie : convergence de la série de l'exponentielle

1) a. Soit M, N deux matrices. Montrer que $\|MN\| \leqslant 2\|M\|\|N\|$.

b. Soit p un entier naturel non nul. En déduire une majoration de $\|M^p\|$ en fonction de $\|M\|$ et p.

2) Soit M une matrice. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{\|M^k\|}{k!} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + e^{2\|M\|}\right).$$

3) Soit M une matrice. Démontrer que la suite $S_p(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{M^k}{k!}$ converge pour p tendant vers l'infini.

La limite de cette suite sera notée $e^M = \exp(M) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M^p}{p!}$. On définit ainsi sur $\mathcal{M}_2(K)$ une application appelée *exponentielle de matrices.*

4) a. Calculer $\exp(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

b. L'application exp est-elle injective sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

5) Calculer $\exp(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Soit M et N deux matrices. On suppose dans cette question $MN = NM$. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $s_p(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{k!}$.

a. Démontrer que si $p \in \mathbb{N}$,

$$\|S_p(M)S_p(N) - S_p(M + N)\| \leqslant s_{2p}(2\|M\| + 2\|N\|) - s_p(2\|M\| + 2\|N\|).$$

b. En déduire que $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$.

c. Démontrer que l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ par exp est contenue dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

II. Deuxième partie : surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

1) Soit M et N deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose M et N semblables.

a. Montrer que $\det M = \det N$.

b. Démontrer que M^p est semblable à N^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

c. En déduire que $\exp M$ est semblable à $\exp N$.

d. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que A est dans l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ par l'exponentielle. Démontrer qu'il en va alors de même pour la matrice B.

On note pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et toute matrice M, $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_2)$.

2) Montrer que si M et N sont semblables, $P_M(\lambda) = P_N(\lambda)$

3) Montrer que $P_M(\lambda)$ est un trinôme du second degré. Préciser ses coefficients en fonction de la trace et du déterminant de M.

4) Soit M une matrice. On suppose que $P_M(\lambda)$ possède dans $\mathbb{K}$ deux racines distinctes λ_0 et μ_0.

a. Démontrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que $\exp(M)$ est semblable à une matrice diagonale. Préciser $\det \exp(M)$.

5) Soit M une matrice. On suppose que $P_M(\lambda)$ possède dans $\mathbb{K}$ une racine double λ_0. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à M. On note $d = \dim \ker(u - \lambda_0 I_{\mathbb{K}^2})$.

a. Quelles valeurs peut prendre d ? Préciser M, puis $\exp M$ lorsque $d = 2$.

On suppose désormais dans cette question que $d = 1$.

b. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e, \varepsilon)$ telle que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta \neq 0.$$

Exprimer la matrice de u dans la base $(k.e, \varepsilon)$ où $k \in \mathbb{C}^*$ est un scalaire non nul quelconque.

c. Montrer que M est semblable à $N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

d. Calculer $\exp \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

6) Démontrer que pour toute matrice M,

$$\det \exp(M) = \exp \operatorname{Tr}(M).$$

7) Démontrer que si A est une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = \exp M$.

Conclusion : *l'exponentielle de matrices est une application surjective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sur $GL_2(\mathbb{C})$.*

III. Troisième partie : image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'exponentielle

On appelle *valeur propre d'une matrice M* les racines dans $\mathbb{C}$ de $P_M(\lambda) = 0$.

1) a. Démontrer que deux matrices complexes semblables ont mêmes valeurs propres.

b. On suppose que deux matrices complexes ont mêmes valeurs propres et qu'elles sont distinctes. Montrer que les deux matrices sont semblables.

2) Préciser les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, puis celle de $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

3) Soit $S = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Trouver e et ε deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^2$ tels que $Se = i\theta.e$ et $S\varepsilon = -i\theta\varepsilon$. Puis exprimer $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$. Conclure que $\exp S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

4) Soit M et N deux matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On désire démontrer que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit donc $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = N$. On écrit $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. A t-on Q ou R inversibles ?

b. Que peut-on dire de la fonction $f(\lambda) = \det(Q + \lambda R)$?

c. Démontrer l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ telle que $P + \lambda_0 Q$ est inversible.

d. En déduire que M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit M une matrice réelle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5) On suppose que M possède deux valeurs propres réelles distinctes ou confondues. Démontrer $\exp M$ possède deux valeurs propres distinctes ou confondues strictement positives.

6) Réciproquement démontrer que si A est une matrice réelle ayant des valeurs propres distinctes ou confondues strictement positives, alors A est dans l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'exponentielle.

On suppose désormais que M possède deux racines complexes non réelles.

7) a. Démontrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ telle que les valeurs propres de $\exp M$ soit $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.

b. Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, que dire de $\exp M$?

c. Montrer que l'application exponentielle définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$n'est pas injective.

d. Soit $A \in \mathbb{R}^* I_2$ une matrice réelle homothétie de rapport non nul. Démontrer que A est dans l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'exponentielle.

8) Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle. Démontrer que A est dans l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'exponentielle.

Conclusion : *L'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'application exponentielle de matrices est constituée des matrices homothéties de rapport non nul, des matrices possédant deux valeurs propres strictement positives, distinctes ou confondues et des matrices sans valeur propre réelle.*

Problème 3 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$ tels que $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ et pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$:

$$u_1 \circ u_2 + u_2 \circ u_1 = 0$$

1) Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$. Démontrer que

$\left\{u \in \mathcal{L}(E), u_{|F} = 0 \text{ et } u(G) \subset G\right\}$ est un sous-espace dont on donnera la dimension.

Indication : considérer $\Phi : u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto (u_{|F}, u_{|G})$.

2) Démontrer l'existence de $p_1 \in \mathcal{L}_1$ et $p_2 \in \mathcal{L}_2$ deux projecteurs tels que $I_E = p_1 + p_2$.

On suppose que p_1 est la projection de E sur F parallèlement à G. On note $r = \dim F$.

3) Reconnaître p_2.

4) Démontrer que $\dim \mathcal{L}_1 \leqslant r^2$ et $\dim \mathcal{L}_2 \leqslant (n-r)^2$.

5) Conclure que $\mathcal{L}_1 = \{0\}$ ou $\mathcal{L}_2 = \{0\}$.