HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}7

Samedi 4 mars 2006

- Durée : 4 heures -

Les deux exercices et le problème sont totalement indépendants. Le devoir se déroule en deux phases. Un premier ensemble de copie correspondant aux deux exercices devra être rendu au bout d'une heure et quarante cinq minutes.

On laissera une marge à gauche. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte. Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Exercice 1 :

1) Soient E un K-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, λ_1, λ_2,..., λ_n n éléments de K deux à deux distincts. Démontrer par récurrence sur n que la somme

$$\ker(u-\lambda_1 I)+\ker(u-\lambda_2 I)+\ldots+\ker(u-\lambda_n I) \quad \text{est directe.}$$

2) Démontrer que les fonctions suivantes forment une famille libre dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$:

$$f : x \longmapsto e^x,\quad g : x \longrightarrow \sqrt{1-x},\quad h : x \longmapsto x\ln(1+x).$$

3) Soit p et q deux projecteurs d'un espace E. On suppose $\operatorname{im} p = \operatorname{im} q$ et $p\circ q = q\circ p$. Montrer que $p=q$.

4) On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On note pour $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f_{\alpha,\beta} : x \longmapsto x^\alpha(\ln x)^\beta$. Montrer que la famille $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta>0}$ est libre dans E.

Exercice 2 :

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on considère l'arc Φ défini par

$$x(t)=\frac{2t}{t^2-1} \quad \text{et} \quad y(t)=\frac{(t+1)^2}{t^2}.$$

1) Étudier les variations de l'arc Φ. On étudiera notamment les branches infinies et les points asymptotes.

2) Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la quantité $\dfrac{y(t)-1}{x(t)}$. Que représente t-elle ?

3) Le tracé rapide suggère un point double. Déterminer ce point double.

4) Tracer soigneusement l'arc Φ.

Problème : suites définies par récurrence

Soit $\alpha < \beta$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $I =]\alpha, \beta[$. On se donne $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et possédant au moins un point fixe. On note $\Omega = \{x \in I, f(x) = x\}$ qui est donc un ensemble non vide.

On appelera *suite récurrente* ou s'il faut éviter une ambiguïté, *suite récurrente associée à* f une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = f(x_n).$$

Pour $p \geqslant 1$, on note $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$ et f^0 est l'identité de I.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de ces suites.

I. Existence et convergence des suites récurrentes

1) Démontrer que si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{<-1>}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) On définit par récurrence les parties I_p de I par $I_1 = I$ et pour tout $p \geqslant 1$, $I_{p+1} = f^{<-1>}(I_p)$.

a. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, I_p est ouvert, $I_{p+1} \subset I_p$.

On note $A = \bigcap_{p\geqslant 1} I_p$.

b. Montrer que A est non vide et stable par f.

c. Démontrer qu'une suite f-récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si, et seulement si $x_0 \in A$.

d. Déterminer les parties Ω et A dans les trois cas suivants :

1. $I =]0, 2[$ et pour $x \in]0, 2[$, $f(x) = \sqrt{x}$;
2. $I =]0, 2[$ et pour $x \in]0, 2[$, $f(x) = x^2$;
3. $I =]0, 2[$ et pour $x \in]0, 2[$, $f(x) = 2x - 1$.

3) On suppose f croissante.

a. On choisit un point $x_0 \in A$ tel que $x_0 \leqslant f(x_0)$. Démontrer que la suite f-récurrente de premier terme x_0 converge vers un point de I si, et seulement si, x_0 est majoré par un point fixe de f. Dans ces conditions, caractériser la limite de la suite. Que se passe t-il lorsque la suite ne converge pas vers un point de I ?

b. Décrire rapidement le cas $x_0 \geqslant f(x_0)$.

4) Soit r un point fixe de f. On suppose que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $|f'(r)| < 1$. Un tel point fixe sera dit *attractif*.

a. Montrer l'existence de $k < 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que $V_\varepsilon =]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$ soit inclus dans I et

$$\forall x \in V_\varepsilon,\ \ |f(x) - r| \leqslant k|x - r|.$$

b. Montrer qu'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r si, et seulement si, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in V_\varepsilon$.

c. On note A_r le sous-ensemble des points de A qui sont valeur initiale d'une suite f-récurrente convergeant vers r. Démontrer que A_r est ouvert.

5) Soit r un point fixe de f. On suppose que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $|f'(r)| > 1$. Un tel point fixe sera dit *répulsif*.

a. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon =]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$ soit inclus dans I et

$$\forall x \in V_\varepsilon,\ \ |f(x) - r| \geqslant |x - r|.$$

b. Montrer qu'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r si, et seulement si elle est stationnaire de valeur r i.e. s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = r$ pour tout $n \geqslant N$.

6) On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{5}}(4-x^2) \end{array} .$$

a. Montrer que f a un seul point fixe et qu'il est répulsif.
b. Déterminer les points fixes de $f \circ f$.
c. Préciser, suivant la valeur initiale, le comportement des suites récurrentes associées à f.

II. Vitesse de convergence en un point fixe attractif

Étant donnés deux suites positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dira que $u_n = O(v_n)$ en l'infini, s'il existe $M \geqslant 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n.$$

On considère une suite f-récurrente non stationnaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un point fixe vers un point fixe attractif r.

1) Démontrer qu'il existe $k \in]0,1[$ tel qu'en l'infini $|x_n - r| = O(k^n)$.

2) On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $f'(r) \neq 0$.

a. Montrer grâce à une formule de Taylor qu'il existe une suite $(R_j)_{j\geqslant 0}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j),$$

et $R_j = O(k^j)$ pour j tendant vers l'infini.

b. Démontrer que la suite $\ln(1+R_j)$ est définie à partir d'une certain rang et que la série $\sum \ln(1+R_j)$ converge.

c. Démontrer que le produit $\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(1+R_j)$ converge vers une limite non nulle.

d. Conclure à l'existence d'une contante $\omega(x_0)$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que pour n tendant vers l'infini

$$x_n - r \sim \omega(x_0)\,[f'(r)]^n .$$

3) On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, que $f'(r) = 0$ et $f''(r) \neq 0$.

a. Montrer grâce à une formule de Taylor qu'il existe une suite $(S_j)_{j\geqslant 0}$ de limite nulle telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j),$$

b. En déduire que pour $n \geqslant 2$, on a

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n}(1+S_{n-1}).$$

c. Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-2}|1+S_j|^{2^{-j-1}}$ est convergente et que sa limite est non nulle.

d. On pose $\pi_n = \lim_{m \to +\infty} \prod_{j=n-1}^{m} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$. Montrer que $2^n \ln \pi_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

e. En déduire qu'il existe une constante $\lambda(x_0) \in]0, 1[$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que pour n tendant vers l'infini

$$x_n - r \sim \frac{2}{f''(r)} (\lambda(x_0))^{2^n}.$$

III. Troisième partie : les suites de Héron

On fixe un nombre réel $a > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, on considère la fonction

$$f_p : x \in I = \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{p} \left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}} \right).$$

1) Vérifier que la fonction f_p vérifie les hypothèses de la partie **II**, question **3)**. Montrer que, quelle que soit la valeur initiale $x_0 > 0$, la suite récurrente associée à f_p existe, qu'elle vérifie $x_n \geqslant a^{1/p}$ pour tout $n \geqslant 1$ et qu'elle converge vers $a^{1/p}$.

Étant donnée une suite récurrente associée à la fonction f_p, on notera $\lambda_p(x_0)$ la constante dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que

$$x_n - a^{1/p} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{2}{f_p''(a^{1/p})} (\lambda_p(x_0))^{2^n}.$$

2) On suppose $p = 2$.

a. Montrer que x_n peut s'écrire sous la forme $\dfrac{u_n}{v_n}$ où $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + a v_n^2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2 u_n v_n.$$

b. Exprimer $u_n + \sqrt{a} v_n$, $u_n - \sqrt{a} v_n$, puis x_n en fonction de x_0, $\sqrt{a}$ et n.

c. En déduire que

$$\lambda_2(x_0) = \frac{|x_0 - \sqrt{a}|}{x + \sqrt{a}}.$$

3) Soit $r > 0$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, on pose

$$g_q : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \left[\frac{1}{2} \left(x^q + \frac{r^{2q}}{x^q} \right) \right]^{1/q}.$$

a. Montrer que, quelle que soit la valeur $y_0 > 0$, la suite récurrente $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à g_q existe ; donner l'expression de y_n en fonction de y_0, r et n. Montrer que, si cette suite n'est pas stationnaire, il existe deux constantes non nulles μ_q et C, qu'on explicitera en fonction de r, q et y_0 telles que

$$y_n - r \underset{n \to \infty}{\sim} C (\mu_q)^{2^n}.$$

b. On pose $r = a^{1/p}$. Montrer que pour tout $x \geqslant a^{1/p}$, on a $f_p(x) \leqslant g_{p-1}(x)$ (on pourra utiliser après justifications la concavité de la fonction $t \longmapsto \left(p - 1 + t^{\frac{p}{2(p-1)}} \right)^{p-1}$ sur l'intervalle $]0, 1[$).

c. On suppose $x_0 > a^{1/p}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites récurrentes de même valeur initiale x_0, associées respectivement à f_p et g_{p-1}. Montrer que $a^{1/p} < x_n \leqslant y_n$ pour tout n.

En déduire une majoration explicite de $\lambda_p(x_0)$.

d. On suppose maintenant que $0 < x_0 < a^{1/p}$. Montrer que $\lambda_p(x_1) = \lambda_p(x_0)^2$. En déduire une majoration de $\lambda_p(x_0)$.