Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}6

Samedi 28 janvier 2006

- Durée : 3 heures -

Les trois problèmes et l'exercice sont totalement indépendants.

On laissera une marge à gauche. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte. Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Démontrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie ou infinie lorsque x tend vers $+\infty$.

Problème 1 : étude d'une fonction définie par une série

On admet dans ce problème que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1) a. Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}_+$, les séries $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et $\dfrac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

2) Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3) a. Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$|S(y) - S(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{6}|y - x|.$$

b. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4) a. Démontrer l'existence de $K > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant K|y - x|.$$

b. En déduire que la fonction S est dérivable.

c. Préciser les valeurs $S'(0)$ et $S'(1)$.

5) Démontrer que S est concave (i.e. $-S$ est convexe).

6) Soit $x > 0$. On note $\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}$.

a. Exhiber une primitive Φ de φ telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = 0$. Une telle primitive est-elle unique ?

b. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\varphi(n+1) \leqslant \Phi(n+1) - \Phi(n) \leqslant \varphi(n).$$

c. En déduire que $-\Phi(1) \leqslant S(x) \leqslant 1 - \Phi(1)$.

d. En déduire un équivalent simple de $S(x)$ en $+\infty$.

7) a. Dresser le tableau de variations de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Problème 2 : théorème de division

I. Première partie :

On se donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose pour $x \neq 0$ réel, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

1) Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2) Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note encore g ce prolongement. Préciser $g(0)$.

3) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Préciser $g'(0)$.

4) Soit $n \geqslant 2$. On suppose uniquement dans cette question que

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = 0.$$

a. Montrer que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $f^{(k)}(x) = o(x^{n+1-k})$ lorsque x tend vers 0.

b. En déduire que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g^{(n)}(x) = 0$.

c. Conclure soigneusement que g est de classe $\mathcal{C}^n$ et que

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \ldots = g^{(n)}(0) = 0.$$

5) Soit $n \geqslant 2$. On ne fait plus d'hypothèse sur la valeur des $f^{(k)}(0)$. On pose pour x réel,

$$\tilde{f}(x) = f(x) - f(0) - xf'(0) - \frac{x^2}{2!} f''(0) - \cdots - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$

a. Calculer pour $0 \leqslant k \leqslant n+1$, $\tilde{f}^{(k)}(0)$.

b. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^n$ et préciser $g^{(n)}(0)$.

6) Conclure que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

II. Deuxième partie :

Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$.

1) Montrer que φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2) Calculer pour tout $n \geqslant 0$, $\varphi^{(n)}(0)$.

3) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) > 0$.

4) Démontrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même et que φ^{-1} est une fonction impaire.

5) Justifier le fait que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

6) Écrire un développement limité de φ à l'ordre 5 en 0.

7) Démontrer que φ^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 et préciser ce développement (on partira de l'identité $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$ pour x réel).

Problème 3 : Développement en série de Taylor

I. Première partie :

On pose pour $n \geqslant 1$,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n.$$

1) Trouver une constante C non nulle telle que pour n tendant vers l'infini,

$$U_{n+1} - U_n \sim \frac{C}{n^2}.$$

2) En déduire que la suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

3) Montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$n! \underset{n \to \infty}{\sim} K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

II. Deuxième partie :

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{e^x - 1} \end{array},$$

et l'on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = f^{(n)}(0)$.

1) a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} > 0$.

c. Démontrer l'existence de $M > 0$ telle que si $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

d. Vérifier que $e^{1/e} \leqslant 2$.

e. Démontrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant f^{(n)}(x) \leqslant M.n^n.$$

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_k}{k!} x^k.$$

Démontrer que la suite $S_n(x)$ converge vers $f(x)$.

3) a . On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et on suppose que le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ converge vers un réel $\lambda \in [0,1[$. Démontrer que la série $\sum a_n$ converge.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{k!}$ converge.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $U_p = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{k!}$.

c. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$U_{p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k U_k.$$

d. Conclure que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $T_p = U_p$.