HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}5

Samedi 7 janvier 2006

- Durée : 3 heures -

Les trois problèmes sont totalement indépendants.

On laissera une marge à gauche. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte. Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 : le théorème de Dini

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites de parties compactes non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} \subset K_n$. Démontrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \quad \text{est non vide.}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$ fixé, la suite $f_n(x)$ converge vers 0. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \leqslant f_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]} f_n(x).$$

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers un réel $\alpha \geqslant 0$.

3) On va démontrer par un raisonnement par l'absurde que $\alpha = 0$. On suppose donc $\alpha > 0$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n = \left\{ x \in [a,b] |\ f_n(x) \geqslant \frac{\alpha}{2} \right\} \quad \text{est une partie compacte non vide de } \mathbb{R}.$$

b. Aboutir à une contradiction.

4) Conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in [a,b]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varepsilon.$$

5) On considère pour n entier naturel la fonction $f_n : x \in [0,1[\longmapsto x^n$.

a. Déterminer pour tout $x \in [0,1[$ la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

b. Que vaut $\alpha_n = \sup_{x\in[0,1[} x^n$?

c. Quelle conclusion peut-on tirer ?

Problème 2 : limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k$

Pour la question 2)a., on pourra faire une étude de fonction comme dans le secondaire avec le calcul d'une dérivée.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k.$$

1) Pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p < n$, vérifier l'égalité

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-p} \left(\frac{k}{n}\right)^k + \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}.$$

2) a. Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto \left(\frac{x}{n}\right)^x$ sur l'intervalle $]0,n]$.

b. Soit $1 \leqslant p < n$. Démontrer l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n-p} \left(\frac{k}{n}\right)^k \leqslant \frac{1}{n} + n\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n-p}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \mathrm{E}(n^{1/3})$.

c. Montrer que $p_n = n^{1/3} + o(n^{1/3})$ lorsque n tend vers l'infini. Donner un équivalent simple de p_n.

d. Démontrer que

$$A_n = \ln\left(n\left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^{n-p_n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -n^{1/3}.$$

e. Conclure que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-p_n} \left(\frac{k}{n}\right)^k = 0$.

3) a. Démontrer que pour u voisin de 0 l'inégalité suivante est vérifiée :

$$-u - u^2 \leqslant \ln(1-u) \leqslant -u.$$

b. Pour n assez grand, justifier les inégalités suivantes

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} e^{-k} \leqslant \sum_{k=0}^{p_n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p_n-1} e^{-k}\right) \exp\left(\frac{p_n^2}{n}\right).$$

c. Déterminer la limite de $\sum_{k=0}^{p_n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}$ quand n tend vers l'infini, puis la limite de u_n.

Problème 3 : fonction continue prenant deux fois chacune de ses valeurs

On n'hésitera pas dans ce problème à faire une figure pour illustrer chacun de ses raisonnements.

I. Première partie.

Soit I un intervalle d'intérieur non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. On désire prouver que f est strictement monotone. Pour cela, on introduit la partie

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in I^2, \ \ x < y\}$$

et la fonction $\varphi : (x, y) \in \mathcal{T} \longmapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{R}$.

1) Représenter $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}^2$ lorsque $I = [1, 2]$.

2) Montrer que l'application φ ne s'annule pas.

Soit (a, b) et (x, y) deux éléments de $\mathcal{T}$. On pose pour $t \in [0, 1]$, $M(t) = (1-t)(a, b)+t(x, y) = ((1-t)a+tx, (1-t)b+ty)$: c'est le barycentre des points (a, b) et (x, y) affectés respectivement des coefficients $1 - t$ et t.

3) Montrer que $M(t) \in \mathcal{T}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

4) Justifier la continuité de $\Phi : t \in [0, 1] \longrightarrow \varphi(M(t))$.

5) Conclure que f est strictement monotone.

II. Deuxième partie.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui prend exactement deux fois chaque valeur i.e. pour tout $y \in f(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Card} f^{<-1>}(\{y\}) = 2.$$

1) On suppose de plus dans cette question que f admet un maximum M sur $\mathbb{R}$ atteint en deux réels α et β avec $\alpha < \beta$.

a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha, \beta\}$, $f(x) < M$.

b. Démontrer l'existence de $m = \min\limits_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x)$ et $m < M$.

c. Démontrer que pour tout $y \in]m, M[$, il existe $x \neq x'$ dans $]\alpha, \beta[$ tels que $f(x) = f(x') = y$.

d. Aboutir à une contradiction.

On revient au cas général.

2) Soit $y \in f(\mathbb{R})$ et $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = y$.

a. On pose $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Justifier l'existence de M et m et vérifier que $m < y$ ou $y < M$.

b. On suppose $y < M$. Démontrer que

$$(\forall x < a, \ \ f(x) < f(a)) \quad \text{et} \quad (\forall x > b, \ \ f(x) < f(b)) .$$

3) Conclure qu'il n'y a pas de fonction continue sur $\mathbb{R}$ prenant exactement deux fois chaque valeur.