HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}4

Samedi 3 décembre 2005

\- Durée : 2 heures 45 minutes -

On laissera une marge à gauche. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte. Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Homographies

On convient que z désigne un nombre complexe. On note Q l'ensemble des quadruplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$. À tout élément (a, b, c, d) de Q, on associe la fonction

$$f_{a,b,c,d} : z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Une telle application est appelée *homographie*.

I. Première partie.

Soit $(a, b, c, d) \in Q$.

1) On suppose $c = 0$.

a. Montrer que $s = f_{a,b,c,d}$ est définie sur $\mathbb{C}$. Quelle est la nature géométrique de s ?

b. On suppose de plus $d = 1$. Exprimer s^{-1}.

2) On suppose $c \neq 0$. Montrer que $f_{a,b,c,d}$ établit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$. On vérifiera que sa réciproque est une homographie et on exprimera $(a', b', c', d') \in Q$ tel que $f_{a',b',c',d'} = f^{-1}_{a,b,c,d}$.

3) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. On admet que si $P(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ s'annule en au moins trois points distincts, alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Soit (a, b, c, d) et (a', b', c', d') dans Q tels que $f_{a,b,c,d} = f_{a',b',c',d'}$. Démontrer soigneusement l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ et $d' = \lambda d$.

Ce problème de domaine de définition est très pénible surtout si on désire composer les homographies entre elles. On le contourne ainsi :

On décide de rajouter un nouvel élément n'appartenant pas à $\mathbb{C}$ que l'on note ∞. On note $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Cet ensemble est appelé *sphère de Riemann*. Soit $(a, b, c, d) \in Q$. Si $c = 0$, on prolonge $f_{a,b,c,d}$ à $\widetilde{\mathbb{C}}$ en posant $f_{a,b,c,d}(\infty) = \infty$. Dans le cas où $c \neq 0$, on pose $f_{a,b,c,d}(\infty) = \dfrac{a}{c}$ et $f_{a,b,c,d}\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$. Par construction, $f_{a,b,c,d}$ est une permutation de $\widetilde{\mathbb{C}}$ dans tous les cas.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des bijections homographiques ainsi définies. On notera $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{H}$ constituée des similitudes directes i.e. des homographies $f_{a,b,c,d}$ avec $c = 0$.

On appelle *cercle de la sphère de Riemann*, ou encore $\widetilde{\mathbb{C}}$-*cercle*. toute partie de $\widetilde{\mathbb{C}}$ qui est soit un vrai cercle de $\mathbb{C}$, soit une droite de $\mathbb{C}$ à laquelle on rajoute ∞.

Enfin, on note $I = f_{0,1,1,0}$ l'homographie $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$.

II. Deuxième partie.

1) Soit (a, b, c, d) et (a', b', c', d') dans Q. Montrer que $f_{a',b',c',d'} \circ f_{a,b,c,d}$ est encore une homographie. On précisera $(A, B, C, D) \in Q$ tel que $f_{A,B,C,D} = f_{a',b',c',d'} \circ f_{a,b,c,d}$.

2) De quelle structure peut-on doter l'ensemble $\mathcal{H}$ (groupe, anneaux, corps...) ? On justifiera la réponse.

3) On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & f_{a,b,c,d} \end{array}.$$

Que dire de l'application φ ? Préciser son noyau.

4) a. Déterminer les éléments f de $\mathcal{H}$ tels que $f(\infty) = \infty$.

b. En déduire que toute $f \in \mathcal{H}$ qui n'est pas dans $\mathcal{S}$, il existe deux similitudes directes s et s' dans $\mathcal{S}$ telles que

$$f = s \circ I \circ s'.$$

III. Troisième partie.

1) Que vaut $I(\infty)$?

2) Soit $C = C(\omega, R)$ un cercle de $\mathbb{C}$.

a. Montrer que si $0 \notin C$, son image par I est un cercle.

b. Montrer que si $0 \in C$, son image par I est la réunion d'une droite de $\mathbb{C}$ et du point ∞.

3) Soit D une droite de $\mathbb{C}$.

a. Montrer que si $0 \notin D$, l'image de D par I est un cercle de $\mathbb{C}$ passant par 0, privé de ce point.

b. Quelle est l'image par I d'une droite passant par 0 ?

4) Conclure que tout élément de $\mathcal{H}$ transforme un $\widetilde{\mathbb{C}}$-cercle en un $\widetilde{\mathbb{C}}$-cercle.

IV. Quatrième partie.

Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre éléments distincts de $\mathbb{C}$, on définit le *birapport de* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ par

$$B(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \times \frac{\delta - \beta}{\delta - \alpha}$$

$$B(\alpha, \beta, \gamma, \infty) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}, \quad B(\alpha, \beta, \infty, \delta) = \frac{\delta - \beta}{\delta - \alpha}, \quad B(\alpha, \infty, \gamma, \delta) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta}, \quad B(\infty, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\beta - \delta}{\beta - \gamma}.$$

1) Soit $f \in \mathcal{H}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre éléments distincts de $\widetilde{\mathbb{C}}$. Démontrer que $B(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(\delta)) = B(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$: *on dit qu'une homographie conserve le birapport.*

2) Réciproquement, on considère $f : \widetilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}$ une bijection conservant le birapport. Démontrer que f est une homographie.

3) Soit (m_1, m_2, m_3) et (n_1, n_2, n_3) deux triplets formés de points deux à deux distincts dans $\widetilde{\mathbb{C}}$. On désire démontrer qu'il existe une unique homographie f telle que $f(m_1) = n_1$, $f(m_2) = n_2$ et $f(m_3) = n_3$ de deux manières différentes :

a. Première méthode : utiliser la question 1).

b. Deuxième méthode : traiter le cas $m_3 = n_3 = \infty$ puis le cas général grâce à la question II.4)b.

V. Cinquième partie.

1) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $f = f_{a,b,0,1} \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la suite définie par $u_0 = \alpha$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n) = au_n + b$.

a. Exprimer u_n en fonction de n lorsque $a = 1$.

b. On suppose $a \neq 1$. Montrer que f admet un unique point fixe $l \in \mathbb{C}$. On pose $v_n = u_n - l$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par v_n et exprimer u_n en fonction de n.

2) Soit $(a, b, c, d) \in Q$, $\alpha \in \widetilde{\mathbb{C}}$ et $f = f_{a,b,c,d} \in \mathcal{H}$ avec $c \neq 0$. On considère la suite de $\widetilde{\mathbb{C}}$ définie par $u_0 = \alpha$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Enfin, on pose $r_0 = \infty$ et $r_{n+1} = f^{-1}(r_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. On notera $A = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose de plus $\alpha \notin A$.

a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans $\mathbb{C}$.

b. Démontrer que f possède deux points fixes λ et μ éventuellement confondus.

c. On suppose $\lambda \neq \mu$ et $u_0 \neq \mu$. Démontrer l'existence d'une constante $K \in \mathbb{C}^*$ telle que pour tout $z \neq \mu$,

$$\frac{f(z) - \lambda}{f(z) - \mu} = K\frac{z - \lambda}{z - \mu}.$$

En déduire que la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - \lambda}{u_n - \mu}$ est une suite géométrique.

3) On considère la suite réelle définie par $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{a_n + 3}$. Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Exprimer a_n en fonction de n. Déterminer la limite de a_n en l'infini.

4) On suppose $\lambda = \mu$.

a. Démontrer que pour $z \neq \lambda$,

$$f(z) - z = -c\frac{(z - \lambda)^2}{cz + d}.$$

b. En déduire l'existence de $h \in \mathbb{C}$ tel que pour $z \neq \lambda$,

$$\frac{1}{f(z) - \lambda} - \frac{1}{z - \lambda} = h.$$

En déduire que la suite $w_n = \dfrac{1}{u_n - \lambda}$ est arithmétique.

5) On considère la suite réelle définie par $b_0 = 5$ et $b_{n+1} = \dfrac{4b_n - 9}{b_n - 2}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geqslant 3$ et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Exprimer b_n en fonction de n. Déterminer la limite de b_n en l'infini.

VI. Sixième partie.

1) Montrer qu'il existe un unique $\widetilde{\mathbb{C}}$-cercle passant par 0, 1 et ∞.

2) Soit m, n et o trois points distincts de $\widetilde{\mathbb{C}}$. Montrer qu'il existe un unique $\widetilde{\mathbb{C}}$-cercle passant par m, n, o.

On dit que quatre points distincts de $\widetilde{\mathbb{C}}$ sont *cocycliques* s'ils sont sur un même $\widetilde{\mathbb{C}}$-cercle.

3) Soit $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$, distinct de 0, 1 et ∞. Démontrer que $0, 1, \infty, z$ sont cocycliques si, et seulement si $B(0, \infty, z, 1) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4) En déduire que quatre points distincts m, n, o, p de $\widetilde{\mathbb{C}}$ sont cocycliques si, et seulement si $B(m, n, o, p) \in \mathbb{R}$.