Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}3

Samedi 12 novembre 2005

\- Durée : 3 heures 30 minutes -

L'exercice et les deux problèmes sont totalement indépendants.

On laissera une marge à gauche. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte. Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Exercice :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + (4+2i)z - 13 + 34i = 0.$$

Les calculs doivent figurer sur la copie.

Problème 1 : inégalité de réordonnement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, des réels.

a. On suppose qu'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $b_k \leqslant b_n$. Démontrer l'inégalité

$$a_1b_1 + \cdots + a_kb_n + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_k \leqslant a_1b_1 + \cdots + a_kb_k + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n.$$

b. On suppose de plus que $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Démontrer que si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, on a

$$a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)} \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

2) a. Déduire de ce qui précède que si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, pour toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$, on a

$$a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)} \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

b. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

3) Soit $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$.

a. Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$a_k b_1 + a_{k-1} b_2 + \cdots + a_2 b_{k-1} + a_1 b_k \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k$$

$$\text{et} \quad a_n b_k + a_{n-1} b_{k-1} + \cdots + a_{k+1} b_{n-1} + a_k b_n \leqslant a_k b_k + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n.$$

b. En déduire l'inégalité de Tchebycheff

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

c. Soit a, b, c des réels positifs. Montrer que

$$(a+b+c)^n \leqslant 3^{n-1}(a^n + b^n + c^n).$$

4) Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs.

a. Démontrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\displaystyle\sum_{j \neq i} a_j}\right) = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_j}.$$

b. À l'aide de la question **2)b.**, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_i}{\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_j} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Problème 2 : théorème de Tchebycheff

On admettra l'existence de la fonction logarithme néperien $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\ln$ *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *dans* $(\mathbb{R}, +)$.

2. $\ln(e) = 1$ *où* $e = \exp(1) > 1$.

3. $\ln$ *est strictement croissante.*

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier, on note $\nu_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteur premier. On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers au plus égaux à n.

I. Préliminaires

1) Que vaut $\ln(1)$?

2) a. Soit $p > 1$ et $x > 1$. Démontrer l'existence d'un unique $r \in \mathbb{N}$ tel que $p^r \leqslant x < p^{r+1}$.

b. Exprimer r en fonction de p et x à l'aide de la fonction ln.

3) Démontrer que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $\ln x \geqslant M$ (*cela traduit que la limite* $\ln$ *en* $+\infty$ *est égale à* $+\infty$).

4) a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_{2n}^n \leqslant 2^{2n}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \leqslant C_{2n}^n$.

5) Calculer pour les différentes valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la quantité $f(x) = \mathrm{E}(2x) - 2\mathrm{E}(x)$. Représenter le graphe de f.

6) Écrire une fonction sur la calculatrice qui prend n en argument et renvoie $\pi(n)$.

II. Valuation p-adique de $C_{p^n}^k$

Soit $p \in \mathcal{P}$.

1) Montrer que si $k \in \mathbb{N}$ avec $2 \leqslant k \leqslant p-1$, alors p divise C_p^k.

2) Soit $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant p^n - 1$. Démontrer

$$\nu_p(C_{p^n}^k) = n - \nu_p(k).$$

III. Valuation p-adique de $n!$

1) Soit k et n dans $\mathbb{N}^*$. Dans N^*, quel est le nombre de multiples de k inférieur ou égal à n ?

2) Démontrer que si $p \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à support fini pour l'addition (autrement dit, on justifiera l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k \geqslant k_0$, $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right) = 0$).

3) Soit $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\nu_p(n!) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right)$.

4) Écrire une fonction sur la calculatrice qui prend n et p comme argument et renvoie $\nu_p(n!)$.

5) Calculer $\nu_5(2005!)$. Quel est le nombre de zéro à droite dans l'écriture décimale de $2005!$?

IV. Théorème de Tchebycheff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p \in \mathcal{P}$, on note r_p l'unique entier de $\mathbb{N}$ tel que $p^{r_p} \leqslant 2n < p^{r_p+1}$.

1) Montrer à l'aide de la question **II.3)** que C_{2n}^n divise $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leqslant 2n}} p^{r_p}$.

2) En déduire que $C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$.

3) En admettant que pour $n \geqslant 3$, la suite $\frac{n}{\ln n}$ est croissante, démontrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour $n \geqslant 3$

$$K \frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n).$$

4) Démontrer que $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n < p \leqslant 2n}} p$ divise C_{2n}^n.

5) En déduire $n^{\pi(2n) - \pi(n)} \leqslant 2^{2n}$.

6) a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k(\pi(2^{k+1}) - \pi(2^k)) \leqslant 2^{k+1}$.

b. Montrer que $\pi(2^{k+1}) \leqslant 2^k$.

c. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $\pi(2^{n+1}) \leqslant 3\frac{2^{n+1}}{n+1}$.

d. Conclure que $\pi(n) \leqslant 6 \ln 2 \frac{n}{\ln n}$.