HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}11

Mercredi 7 juin 2006

- Durée : 4 heures -

La calculatrice est autorisée comme moyen de vérification. Cependant, les calculs doivent être éffectués et rédiger sur la copie.

L'épreuve se déroule en deux phases. L'exercice doit être rendu au bout d'une heure sur un premier ensemble de copie. Les deux problèmes seront rendus au bout de quatre heures.

On tiendra grand compte de la qualité de la rédaction.

Exercice :

1) Calculer la limite suivante

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{-\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)}{4t^3}+\frac{1}{2t^2(1-t^2)}\right).$$

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et (E) l'équation différentielle

$$2xy'+y=\frac{1}{1-x}$$

où $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue dérivable.

a. Résoudre (E) quand $I =]1, +\infty[$.

b. Résoudre (E) quand $I =]0, 1[$.

c. Résoudre (E) quand $I =]-\infty, 0[$.

3) Montrer que (E) admet une unique solution Y lorsque $I =]-\infty, 1[$ (on utilisera la première question).

Problème 1 :

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, par (C) le cercle centré en O de rayon donné $R > 0$ et par A_1, A_2 et A_3 les points de coordonnées respectives $(R, 0)$, $(0, R)$ et $(-R, 0)$.

On note (E) la courbe d'équation $4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 0$.

1) Montrer que (E) est une ellipse. En déterminer les axes de symétrie et le centre. Que vaut le demi grand axe ? Que vaut le demi petit axe ?

2) Étudier le signe de l'expression $4x^2 + 5y^2 - 4Ry - 4(x^2 + y^2 - R^2)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire les positions relatives de (E) et (C).

3) a. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de représentation paramétrique $x(\theta) = a\cos\theta$ et $y(\theta) = b\sin\theta$, où a et b sont des réels non nuls et où θ décrit $\mathbb{R}$. Montrer que la droite (D) d'équation $y = mx + m'$ rencontre $(\mathcal{E})$ en un point unique si, et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+m')^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{a^2} + m\frac{mx+m'}{b^2} = 0.$$

En déduire que dans ce cas, (D) est tangente à $(\mathcal{E})$.

b. En se ramemant à la question précédente, montrer que, si dans $\mathcal{P}$ une droite coupe une ellipse en un seul point, elle lui est tangente. Est-ce encore le cas pour une parabole ? Pour une hyperbole ?

c. Montrer que les droites $x + y = R$ et $-x + y = R$ sont tangentes à (E) en des points que l'on précisera. Tracer soigneusement (C) et (E), ainsi que ces deux droites.

4) On considère l'arc paramétré défini par

$$M(t) = O + R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\overrightarrow{\imath} + R\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\overrightarrow{\jmath} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie (γ) de (C) que l'on précisera. Si t est réel, on dira que t est le *paramètre* du point $M(t)$.

5) Soit t et u deux réels. Montrer que $(1-p)x + sy - R(1+p) = 0$ est une équation de la droite $(M(t)M(u))$ où $s = t + u$ et $p = tu$.

Si $t = u$, la notation $(M(t)M(u))$ désignera cette fois la tangente en $M(t)$ à (γ). On admettra sans le vérifier que l'équation trouvée convient encore dans ce cas.

6) a. Soit M un point de (γ), de paramètre t. Montrer que, sauf dans un cas particulier à vérifier , son symétrique orthogonal $\widehat{M}$ par rapport à $O + \mathbb{R}\overrightarrow{\jmath}$ est un point de (γ) ; en exprimer le paramètre, noté $\hat{t}$.

Si A_0 désigne le point de coordonnées $(R, 2R)$, montrer que, lorsque $t \neq 1$, la droite $(A_0\widehat{M})$ recoupe (γ) au point de paramètre $\dfrac{1}{1-t}$ (on pourra utiliser la question 5).

b. Dans le cas particulier où $t \neq 1$ et $u = \dfrac{1}{1-t}$, on pose toujours $s = t + u$ et $p = tu$. Montrer que la droite $(M(t)M(u))$ est tangente à (E) (on pourra exprimer $(p+1)s$ en fonction de p seulement et utiliser la question 3)b.)

c. En utilisant les questions qui précèdent, montrer que, si un point A de (C) est distinct de A_1, A_2 et A_3 définis au début du problème, alors une contruction géométrique simple, que l'on détaillera, permet de construire deux autres points A' et A'' de (C) tels que les cotés $AA'A''$ soient tangents à (E). Étudier le cas des points A_1, A_2 et A_3.

7) Récapituler les résultats de cette partie à l'aide d'une figure sur papier millimétré.

Problème 2 :

La question 8) de la partie III. n'est pas à traiter en temps limité.

Soient K un corps commutatif et $n \geqslant 2$ un entier. On note pour tout $(i,j) \in \{1, 2, \ldots n\}^2$, E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et la j-ième colonne. Si $\lambda \in K$ et $i \neq j$, on note $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$. $T_{ij}(\lambda)$ est appelée matrice de transvection.

On rappelle que $\mathrm{GL}_n(K)$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$. et $\mathrm{SL}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K),\ \det M = 1\}$. On définit également

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ \text{ et } \det M = 1\}.$$

I. Première partie.

1) Calculer $E_{ij}E_{kl}$ pour tout $(i,j,k,l) \in \{1,2,\dots,n\}^4$. Préciser pour tout $(\lambda,\mu) \in K^2$, $T_{ij}(\lambda)T_{kl}(\mu)$ lorsque $i \neq j$, $k \neq l$ et $j \neq k$. En déduire l'inverse de $T_{ij}(\lambda)$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

a. Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur ligne proportionnel à une autre ligne de A peut se faire par multiplication à gauche par une matrice de tranvection.

b. Etablir un résultat analogue sur les colonnes.

3) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{SL}\ n(K)$. Montrer qu'il existe P et Q dans $\mathcal{M}_n(K)$, produits de matrices de transvection, telle que la matrice $B = PAQ = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ vérifie $b_{11} = 1$, $b_{1i} = b_{i1} = 0$ pour $i \geqslant 2$ (on envisagera successivement les trois cas suivants : 1) $a_{11} = 1$, 2) $a_{11} \neq 1$ et il existe $i \geqslant 2$ telle que $a_{i1} \neq 0$ ou $a_{1i} \neq 0$, 3) $a_{11} \neq 1$ et pour tout $i \geqslant 2$, $a_{i1} = a_{1i} = 0$.)

4) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{SL}\ n(K)$. Montrer qu'il existe P et Q dans $\mathcal{M}_n(K)$, produits de matrices de transvection, telle que $I_n = PAQ$.

5) Conclure que $\mathrm{SL}\ n(K)$ est engendré par les matrices de transvections.

Si $\lambda \in K^*$, on notera

$$D(\lambda) = \mathrm{Diag}\ (1,1,\dots,,1,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ appelée matrice de dilatation.}$$

6) Montrer que les matrices de transvection et les matrices de dilatation engendrent $\mathrm{GL}\ _n(K)$.

II. Deuxième partie.

On note pour $i \neq j$ dans $[\![1,n]\!]$, $M_{ij} = T_{ij}(1)$.

1) Montrer que $\mathrm{SL}\ _n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}\ _n(\mathbb{Q})$.

2) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Que vaut M_{ij}^m ?

3) Soit $M = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On note d le pgcd des éléments de la première colonne de M. Montrer qu'il existe un produit P de matrices du type M_{ij}^m tel que

$$PM = \begin{pmatrix} d & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & \vdots & \times \end{pmatrix}.$$

4) Soit $M \in \mathrm{SL}\ _n(\mathbb{Z})$. Que vaut les pgcd des éléments de la première colonne de M.

5) Conclure que l'ensemble des M_{ij} engendre le groupe $\mathrm{SL}\ _n(\mathbb{Z})$.

6) Soit p un nombre premier.

a. Que peut-on dire de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

b. Montrer que la reduction modulo p des coefficients d'une matrice permet de définir un morphismes de groupes

$$\varphi_{n,p} : \mathrm{SL}\ _n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}\ _n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

c. A l'aide de la question I.5), montrer que $\varphi_{n,p}$ est surjectif.

III. Troisième partie.

Soit G un sous-groupe fini de GL $_n(\mathbb{R})$. On note g le cardinal de G.

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Justifier l'existence de $Q \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que $Q(M) = 0$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. Montrer que $Q(\lambda) = 0$.

2) Soit $M \in G$. On considère M comme une matrice àcoefficients complexes. Montrer que M est diagonalisable. Que peut-on dire des valeurs propres de M ?

3) Déduire de la question précédente que $\mathrm{Tr}M = \mathrm{Tr}(M^{-1})$ et $|\mathrm{Tr}M| \leqslant n$.

4) Quels sont les éléments de G de trace n ? de trace $-n$?

5) Montrer que l'application $(X, Y) \longmapsto < X, Y >=^t XUY$ où $U = \displaystyle\sum_{M \in G} {}^tMM$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

6) Vérifier que pour tout $M_0 \in G$, $< M_0(X), M_0(X) >=< X, X >$.

7) Soit H un sous-groupe fini de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que H est cyclique.

8) En déduire que tout sous-groupe fini de SL $_2(\mathbb{Z})$ est cyclique.

9) Démontrer que le cardinal d'un sous-groupe de SL $_2(\mathbb{Z})$ est 1, 2, 3, 4 ou 6.

10) Soit $S = \displaystyle\sum_{M \in G} M$.

a. Calculer S^2.

b. Montrer que la trace de S est un entier divisible par g.