Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}10

Samedi 20 mai 2006

- Durée : 4 heures -

On tiendra grand compte de la qualité de la rédaction.

Séries de Fourier

On rappelle qu'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ de nombres complexes est absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge. Dans ces conditions, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Étant donnée une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, on dira que la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p$ est convergente (resp. absolument convergente) si les séries $\sum_{p=0}^{+\infty} a_p$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} a_{-p}$ sont convergentes (resp. absolument convergente) et on notera alors

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{-p}.$$

Soient $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ deux suites de nombres réels positifs.

• Si $a_p \geqslant 0$ et s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $m \leqslant n$ dans $\mathbb{Z}$, $\sum_{p=m}^{n} a_p \leqslant M$, alors, on pourra affirmer sans plus de justifications que $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p$ converge.

• Si $0 \leqslant a_p \leqslant b_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, et si $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p$ converge, on pourra alors affirmer sans plus de justifications que $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p$ converge aussi et que $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \leqslant \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p$ (théorème de comparaison des séries à termes positifs).

On appelle *polynôme trigonométrique d'ordre inférieur ou égal à* $n \in \mathbb{N}$ toute fonction du type $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{p=-n}^{n} a_p e^{ip\theta}$ où les a_p sont des nombres complexes.

Préliminaires

1) Soit f une fonction continue, 2π-périodique. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta$$

2) Calculer pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}e^{-iq\theta}\mathrm{d}\theta$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des nombres réels positifs ou nuls. Démontrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les fonctions que

$$\left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_p\right)^2 \leqslant \left(\sum_{p=0}^{n} a_p^2\right)\left(\sum_{p=0}^{n} b_p^2\right).$$

On introduira des fonctions en escaliers f et g prenant les valeurs a_k et b_k respectivement sur $[k, k+1[$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

4) On considère deux séries de nombres complexes $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p^2$ et $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p^2$ absolument convergentes. Démontrer que $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p b_p$ est aussi absolument convergente puis que

$$\left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p b_p|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p|^2\right)\left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |b_p|^2\right)$$

I. Première partie :

1) a. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_p)_{-n \leqslant p \leqslant n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $S_n : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{p=-n}^{n} a_p e^{ip\theta}$. Démontrer l'égalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |S_n(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{p=-n}^{n} |a_p|^2.$$

b. Montrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme trigonométrique S_n d'ordre inférieur ou égal à n et tout $\varphi \in \mathbb{R}$

$$|S_n'(\varphi)|^2 \leqslant K_1 n^3 \int_{-\pi}^{+\pi} |S_n(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta$$

c. En déduire qu'il existe une constante $K_2 > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme trigonométrique S_n d'ordre inférieur ou égal à n, on ait

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |S_n'(\theta)| \leqslant K_2 n^{3/2} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |S_n(\theta)|.$$

d. En déduire qu'il existe une constante $K_3 > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n, on ait

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{K_3 n^{3/2}}{\sqrt{1-x^2}} \sup_{-1\leqslant t\leqslant 1} |P_n(t)| \quad \text{pour tout } -1 < x < 1.$$

2)a. Justifier pour $n \geqslant 1$ l'existence d'un polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) = \cos(n\theta)$ si $x = \cos\theta$.

b. Montrer que T_n est unique. Montrer que T_n est de degré n, scindé à racines simples $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ que l'on exprimera.

c. Démontrer que pour tout polynôme P_{n-1} de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a l'égalité

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(x_k) \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)}$$

pour $x \neq x_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. En déduire l'égalité

$$T_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x-x_k} \quad \text{pour tout } x \neq x_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

d. Soit $A > 0$. On considère dans cette question les polynômes P_{n-1} de degré inférieur ou égal à $n-1$ tels que pour $-1 < x < 1$, on ait

$$|P_{n-1}(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Justifier que pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x$ et en déduire que pour $|x| \leqslant x_{n-1}$, on a $|P_{n-1}(x)| \leqslant An$.

À l'aide de la question 2)c , montrer que pour $x_{n-1} < |x| < 1$, on a $|P_{n-1}(x)| \leqslant An$.

3) En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme de degré inférieur à n, on ait

$$\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n'(x)| \leqslant K n^{5/2} \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n(x)|.$$

II. Deuxième partie :

On désigne par E^0 l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques. Pour $f \in E^0$ et $p \in \mathbb{Z}$, on note

$$a_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) e^{-ip\theta} \mathrm{d}\theta.$$

1) On considère dans cette question les fonctions $f \in E^0$ telle que $a_p(f) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Pour $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère le polynôme trigonométrique $T_\delta(\theta) = 1 - \cos\delta + \cos\theta$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(T_\delta(\theta))^n \mathrm{d}\theta = 0$.

b. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{-\delta} f(\theta)(T_\delta(\theta))^n \mathrm{d}\theta = \lim_{n\to+\infty} \int_{\delta}^{\pi} f(\theta)(T_\delta(\theta))^n \mathrm{d}\theta = 0.$$

c. En déduire que $f(0) = 0$.
d. Conclure que $f = 0$.

2) On considère dans cette question les fonctions $f \in E_0$ telles que la série $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(f)$ soit absolument convergente.

a. Montrer que $g(\theta) = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(f)e^{ip\theta}$ est bien définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que la suite de fonctions $\theta \longmapsto \displaystyle\sum_{p=-n}^{n} a_p(f)e^{ip\theta}$ converge uniformément vers g.

c. En déduire pour $p_0 \in \mathbb{Z}$, $a_{p_0}(f-g)$.
d. Conclure que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$f(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(f)e^{ip\theta}$$

e. Démontrer que la suite $F_n : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto \overline{f(\theta)} \displaystyle\sum_{p=-n}^{n} a_p(f)e^{ip\theta}$ converge uniformément vers $F : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto |f(\theta)|^2$.

f. Montrer l'identité de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p(f)|^2.$$

3) Dans cette question, on considère les fonctions f appartenant à E^0 telles que la série $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} pa_p(f)$ soit absolument convergente.

a. Montrer que f est dérivable et pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f'(\theta) = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} ipa_pe^{ip\theta}$ (on procèdera à une découpe).

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
c. Exprimer $a_p(f')$ en fonction de $a_p(f)$.
d. Montrer qu'il existe $K > 0$, indépendante de f, telle que l'on ait

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |f(\theta)|^2 \leqslant K \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta\right].$$

III. Troisième partie

On désigne par E^∞ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. On dira qu'une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$ est du type (S) si pour tout $k \geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^k a_p$ est absolument convergente.

1) Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathbb{C}$ du type (S). Montrer que la fonction

$$f : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_pe^{ip\theta}$$

appartient à E^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $a_p(f) = a_p$.

2) Soit $f \in E^\infty$. Montrer que la suite $(a_p(f))_{p\in\mathbb{Z}}$ est du type (S) et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(f) e^{ip\theta}.$$