HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}1

Mercredi 21 septembre 2005

- Durée : 3 heures -

Les cinq exercices sont totalement indépendants. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée. Les récurrences ne sauraient être commencées sans une formulation claire de l'hypothèse de récurrence.

Il n'est pas interdit d'admettre certains éléments de démonstration (voire des questions entières) afin de ne pas rester bloqué. Mais ils doivent absolument être mentionnés.

On laissera une marge à gauche.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé, on mettra seulement en évidence les numéros des questions traitées. Il est recommandé par contre d'annoncer ce qui va être démontré et éventuellement par quel type de raisonnement (récurrence, absurde, contraposée...). Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie. La présentation et la rédaction pourront représenter jusqu'à 15% *de la note obtenue.*

Problème 1 : une caractérisation de $\mathbb{N}$

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble totalement ordonné non vide. On suppose que :

- E est bien ordonné i.e. toute partie non vide admet un plus petit élément.
- E n'a pas de plus grand élément.
- Toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.

1) Justifier que E est un ensemble infini.

2) On pose $\Psi(0) = \min E$, $\Psi(1) = \min E\backslash\{\Psi(0)\}$, $\Psi(2) = \min E\backslash\{\Psi(0), \Psi(1)\}$,..., $\Psi(n) = \min E\backslash\{\Psi(0), \Psi(1), \dots \Psi(n-1)\}$.

a. Justifier que l'on définit bien ainsi une application de $\mathbb{N}$ dans E.

b. Montrer que Ψ est strictement croissante.

c. Démontrer que Ψ est surjective.

d. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow E$ strictement croissante et bijective. Démontrer que $\varphi = \Psi$.

3) Soit E une partie infinie de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une unique suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$, strictement croissante telle que $E = \{r_n \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$.

Problème 2 : coloriage d'un graphe

Dans tout le problème, on appelera *graphe* tout couple (S, A) où S est une partie de $\mathbb{N}$ et A un ensemble de paires d'éléments de S (une paire étant un ensemble de cardinal 2). Etant donnés un graphe $G = (S, A)$, les éléments de S seront appelés *sommets de* G, et les éléments de A les *arêtes de* G.

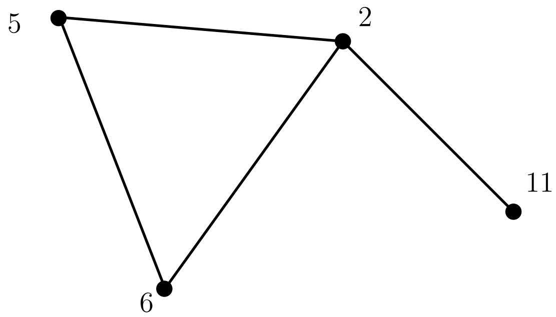
Pour tout graphe G, l'ensemble des sommets sera noté S_G, ou simplement S s'il n'y a pas ambiguïté ; de même, l'ensemble des arêtes de G sera noté A_G, ou simplement A, s'il n'y a pas d'ambiguïté. On notera n_G, ou simplement n s'il n'y a pas d'ambiguïté, le nombre de sommets du graphe.

Dans tout le problème, on considère, à titre d'exemples, les quatres graphes particuliers définis de la façon suivante : pour $k \in \{1,2,3,4\}$, $G_k = (S_k, A_k)$ avec

- $S_k = \{1,2,3,4,5\}$,
- $A_1 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{3,4\},\{4,5\}\}$,
- $A_2 = \{\{4,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{3,4\},\{4,5\}\}$,
- $A_3 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,5\},\{3,4\},\{4,5\}\}$,
- $A_4 = \{\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{3,5\}\}$.

Une *représentation* d'un graphe G consiste à associer à chaque sommet de G un point du «plan »et à tracer le segment défini par deux de ces points si, et seulement si, les sommets auxquels sont associés ces points forment une arête de G. Les points représentant les sommets du graphe doivent être choisis de telle sorte que les segments représentant deux arêtes distinctes quelconques ne puissent se rencontrer en plus d'un point.

Par exemple, le graphe $G = (S, A)$ où $S = \{2,5,6,11\}$ et $\{\{2,5\},\{6,5\},\{2,6\},\{2,11\}\}$ peut être représenté par la figure suivante



1) Représenter les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4.

On dira que deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\varphi : S \longrightarrow S'$ telle que pour tout $(x, y) \in S^2$

$$\{x, y\} \in A \iff \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in A'$$

On dit alors que φ est un *isomorphisme* de G sur G'.

2) a. Montrer que les graphes G_1 et G_3 sont isomorphes.

Pour tout graphe $G = (S, A)$ et tout sommet $s \in S$ de ce graphe, on note $\alpha_G(s)$ (ou simplement $\alpha(s)$ s'il n'y a pas ambiguïté) le nombre d'arêtes du graphe auxquelles s appartient, et on note $V_G(s)$ (ou simplement $V(s)$ s'il n'y a pas ambiguïté) l'ensemble

$$V(s) = \{t \in S, \{s, t\} \in A\}$$

b. Montrer que si φ est un isomorphisme de $G = (S, A)$ dans $G' = (S', A')$ alors pour tout $s \in S$, $\alpha_{G'}(\varphi(s)) = \alpha_G(s)$.

c. Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?

Dans la suite du problème, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ et tout graphe G,

- on appelle p-coloriage de G toute application de $\psi : S \longrightarrow [\![1, p]\!]$,
- on appelle bon p-coloriage de G tout p-coloriage ψ de G tel que pour tout couple $(s, t) \in S$ vérifiant $\{s, t\} \in A$, $\psi(s) \neq \psi(t)$,
- on note $B(p, G)$ l'ensemble des bons p-coloriages de G.

De plus, on note $f_G(p) = \text{Card}(B(p, G))$ et $E(G) = \{p \in \mathbb{N}^*, f_G(p) \neq 0\}$.

3) Soit G un graphe.

a. Montrer que $n_G \in E(G)$.

b. Prouver que si $p \in E(G)$, alors $p+1 \in E(G)$.

c. En déduire l'existence d'un unique $\theta_G \in \mathbb{N}^*$ tel que $E(G) = \{p \in \mathbb{N}^*, p \geqslant \theta_G\}$.

Le but des questions suivantes est d'étudier le principe d'une méthode visant à déterminer la fonction f_G et le nombre θ_G appelé *nombre chromatique de* G pour n'importe quel graphe G.

Soit G un graphe.

4) On suppose A_G vide. Donner une expression de $f_G(p)$ en fonction de p.

On suppose désormais A_G non vide. On note $R(G)$ la partie de S_G défini par

$$R(G) = \bigcup_{a \in A_G} a.$$

On définit deux sommets particuliers de G en posant $\sigma(G) = \min R(G)$ et $\tau(G) = \min\{t \in S_G, \{\sigma(G), t\} \in A_G\}$.

5) Déterminer $\sigma(G_4)$ et $\tau(G_4)$.

On note $\kappa_G : S_G \longrightarrow S_G$ l'application définie par $\kappa_G(s) = s$ pour $s \neq \sigma(G)$ et $\kappa_G(\sigma(G)) = \tau(G)$. On définit deux nouveaux graphes à partir de G, notés respectivement $\lambda(G)$ et $\mu(G)$, en posant

$$S_{\lambda(G)} = S_G \quad \text{et} \quad A_{\lambda(G)} = A_G \backslash \{\{\sigma(G), \tau(G)\}\},$$

$$S_{\mu(G)} = S_G \backslash \{\sigma(G)\} \quad \text{et} \quad A_{\mu(G)} = \{\{\kappa_G(s), \kappa_G(t)\}, \{s,t\} \in A_{\lambda(G)}\}.$$

6) Déterminer les graphes $\lambda(G_4)$ et $\mu(G_4)$.

7) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

a. Vérifier que $B(p, G) \cap B(p, \mu(G)) = \emptyset$.

b. Vérifier que $B(p, G) \subset B(p, \lambda(G))$.

Pour tout $\psi \in B(p, \mu(G))$, on note $\tilde{\psi}$ le p-coloriage de $\lambda(G)$ défini par

$$\tilde{\psi}(\sigma(G)) = \psi(\tau(G)) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(s) = \psi(s) \quad \text{si } s \neq \sigma(G).$$

c. Vérifier que $\tilde{\psi} \in B(p, \lambda(G))$.

d. Montrer que l'application

$$\gamma : \begin{array}{ccc} B(p,G) \cup B(p,\mu(G)) & \longrightarrow & B(p,\lambda(G)) \\ \psi & \longmapsto & \begin{cases} \psi \text{ si } \psi \in B(p,G) \\ \tilde{\psi} \text{ si } \psi \in B(p,\mu(G)) \end{cases} \end{array}$$

est bijective.

e. Exprimer la fonction f_G àl'aide des fonctions $f_{\lambda(G)}$ et $f_{\mu(G)}$.

8) Montrer que, pour tout graphe G, f_G est une fonction polynômiale à coefficients entiers de degré n_G i.e. du type

$$p \longmapsto a_{n_G} p^{n_G} + a_{n_G - 1} p^{n_G - 1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

où les a_k sont des entiers pour $0 \leqslant k \leqslant n_G$.

9) Que peut-on dire des fonctions f_G et $f_{G'}$ si G et G' sont isomorphes ?

10) Soit $G = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}\})$.

a. Déterminer f_G.

b. Déterminer le nombre chromatique de G.