HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}7

A remettre le lundi 7 mars 2005

Problème 1 : groupe multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit pour la base canonique de cet espace, ce qui autorise à considérer l'image im A et le noyau $\ker A$ de la matrice.

On admettra les règles de calculs sur les matrices par blocs : si $(A, A') \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $(B, B') \in \mathcal{M}_{r,n-r,(}\mathbb{R})$, $(C, C') \in \mathcal{M}_{n-r,r,(}\mathbb{R})$ et $(D, D) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $A \in \mathrm{GL}_{\,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{GL}_{\,n-r}(\mathbb{R})$. Dans ces conditions :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

On considère $\mathcal{G}$ un groupe multiplicatif non réduit à $\{0\}$, et contenu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souligne qu'en général $\mathcal{G}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\,n}(\mathbb{R})$ et peut contenir des matrices de rang $r < n$. Cependant toute matrice $A \in \mathcal{G}$ admet pour la multiplication des matrices un inverse dans $\mathcal{G}$; on notera A' cet inverse. Autrement dit, il existe dans $\mathcal{G}$ un élément neutre E, éventuellement différent de I_n, et tel pour tout $A \in \mathcal{G}$, on ait $AE = EA = A$ et $AA' = A'A = E$.

1) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,A, \mathrm{rg}\,B)$.

2) Montrer que les matrices de $\mathcal{G}$ ont le même rang $r \geqslant 1$.

3) a. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{im}\,E \oplus \ker E$.

b. Montrer que si $r < n$, E est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Que vaut E si $r = n$.

c. En déduire que si $r < n$, toute matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathrm{GL}_{\,r}(\mathbb{R})$. Pour chaque entier $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, caractériser les groupes $\mathcal{G}$ de matrices de rang r à l'aide des sous-groupes de $\mathrm{GL}_{\,r}(\mathbb{R})$.

4) a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Etablir l'équivalence des cinq propositions suivantes :

(i) A appartient à un groupe multiplicatif $\mathcal{G}$.

(ii) rg $A = $ rg A^2.
(iii) im $A = $ im A^2.
(iv) $\ker A = \ker A^2$.
(v) $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \mathrm{im}\ A$.

b. Donner, pour $n = 2$, un exemple de matrice non nulle n'appartenant à aucun groupe multiplicatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Montrer que pour que les cinq propositions du **3)** soient vérifiées, il faut et il suffit qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AX = XA, \quad X^2A = X \quad \text{et} \quad A^2X = A$$

d. Etablir dans ce cas que la matrice X est unique.

e. Comparer X à A' et en déduire avec les notations du **2) c.** que A' est semblable à :

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour A fixé, A' dépend-il du groupe auquel A appartient?

5) a. Soit $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathrm{GL}_{\,r}(\mathbb{R})$ avec $r < n$. Montrer que B appartient à un groupe multiplicatif de matrices et que B' est de la forme $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où l'on calculera $C_1 \in \mathrm{GL}_{\,r}(\mathbb{R})$ et C_2 en fonction de B_1 et B_2.

b. Calculer A' pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problème 2 : automorphismes de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n. E^* désigne le dual de E, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale associée. $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de E, GL (E) le groupe des automorphismes de E et I_E l'identité de E.

On appelle automorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ toute application A, linéaire bijective de $\mathcal{L}(E)$ sur lui-même qui, de plus, vérifie pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$:

$$A(u \circ v) = A(u) \circ A(v)$$

On note Aut $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des automorphismes d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$. C'est un groupe pour la loi de composition des applications.

Soit $g \in$ GL (E), on définit l'application A_g par :

$$A_g : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & g \circ u \circ g^{-1} \end{array}$$

A_g s'appelle automorphisme intérieur défini par g.

1) Montrer que l'application $\chi : g \in \mathrm{GL}\ (E) \longmapsto A_g \in \mathrm{Aut}\ \mathcal{L}(E)$ est un morphisme de groupes. Cette application χ est-elle injective?

2) a. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $(x, g(x))$ est une famille liée. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda I_E$.

b. En déduire $\ker \chi$.

3) Pour $(\varphi, x) \in E^* \times E$, on définit l'application :

$$u_{\varphi,x} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \varphi(y)x \end{array}$$

a. Vérifier que $u_{\varphi,x}$ est un endomorphisme de E. Préciser son image et son noyau.

b. A quelle condition nécessaire et suffisante sur (φ, x), $u_{\varphi,x}$ est-il un projecteur non nul?

Dans la suite, on notera pour $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, $u_{ij} = u_{e_j^*,e_i}$.

4) a. Pour tout $(i,j,k,l) \in \{1,2,\dots,n\}^4$, calculer $u_{ij} \circ u_{k,l}$.

b. Que peut-on dire de la famille $(u_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$?

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de E. On définit sur $\mathcal{P}$ la relation binaire suivante : pour tout $(p,q) \in \mathcal{P}^2$, $p \leqslant q$ si, et seulement si $p = p \circ q = q \circ p$.

5) a. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$. Cet ordre est-il total?

b. On appelle élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leqslant$ tout élément $p \in \mathcal{P}$ tel que :

$$(\forall q \in \mathcal{P}) \ \ (q \leqslant p \Longrightarrow q = p)$$

Soit $p \in \mathcal{P}$. Etablir l'équivalence des énoncés suivants :

(i) p est un projecteur de rang 1.

(ii) p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leqslant$.

(iii) Il existe $(\varphi, x) \in E^* \times E$ tel que $p = u_{\varphi,x}$ et $\varphi(x) = 1$.

6) Soit A un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

a. Que peut-on dire de $A(p)$ si $p \in \mathcal{P}$?

b. Que peut-on dire de $A(p)$ si p est un élément minimal de $\mathcal{P}$ pour la relation $\leqslant$?

c. En déduire qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs de E et une famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ de formes linéaires sur E telles que :

(i) pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\varphi_i(\varepsilon_i) = 1$;

(ii) pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $A(u_{ii}) = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}$.

d. Calculer $\varphi_i(\varepsilon_j)$ pour tout $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$. Que peut-on en déduire pour les familles $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$?

7) Soit $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$.

a. Pour $k \in \{1,2,\dots,n\}$, $k \neq j$, calculer $A(u_{ij}) \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_k}$. En déduire le rang et le noyau de $A(u_{ij})$.

b. Calculer $A(u_{ij}) \circ A(u_{ji})$. En déduire l'image de $A(u_{ij})$.

c. Montrer qu'il existe $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$A(u_{ij}) = \lambda_{ij} u_{\varphi_j,\varepsilon_i}$$

d. Montrer que pour tout $(i,j,k) \in \{1,2,\dots,n\}^3$, $\lambda_{ij}\lambda_{jk} = \lambda_{i,k}$.

e. En déduire que pour tout $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$:

$$\lambda_{ij} = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$$

8) a. Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de E, dont la base duale est notée $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ telle que pour tout $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, $A(u_{ij}) = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}$.

b. En déduire qu'il existe un élément de $g \in \mathrm{GL}\,(E)$ tel que pour tout $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, on ait :

$$A(u_{ij}) = g \circ u_{ij} \circ g^{-1}$$

c. Conclure.