HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}6

A remettre le vendredi 28 janvier 2005

On supposera connu le théorème de Césaro.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n = a$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = a$$

2) a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

b. Soit $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$. Etudier :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{C_{pn}^{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$$

3) Soit $u_0>0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$.

c. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in]0,1/2[$ et $u_{n+1}=u_n(1-u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

a. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que si $n\in\mathbb{N}$, $u_n<\dfrac{1}{n+1}$.

b. En considérant la suite $\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}$, trouver un équivalent de u_n.

5) Soit $u_0\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1}=\sin u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer qu'au voisinage de l'infini :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$