



Mathématiques

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N°5

A remettre le lundi 3 janvier 2005

Problème 1 : formule de Simpson

I. Soit $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^5$. On suppose g impaire (pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(-x) = -g(x)$). Pour tout $x \in [-1, 1]$, on pose

$$h(x) = g(x) - \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) + \lambda \frac{x^5}{180}$$

λ étant une constante réelle choisie de façon que $h(1) = 0$.

1) Calculer $g(0)$, $g''(0)$ et $g^{(iv)}(0)$. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^4$ puis calculer $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$ et $h'''(0)$.

2) En déduire l'existence de $c \in]0, 1[$ tel que $h^{(iv)}(c) = 0$.

3) Vérifier l'existence de $(c_1, c_2) \in]0, 1[^2$ tel que

$$\lambda = \frac{g^{(v)}(c_1) + g^{(v)}(c_2)}{2}$$

Conclure à l'existence de $\theta \in]0, 1[$ tel que $\lambda = g^{(v)}(\theta)$.

II. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^5$. Vérifier l'existence de $\gamma \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6} \left[f'(a) + f'(b) + 4f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(v)}(\gamma)$$

(on pourra considérer une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $u(-1) = a$, $u(1) = b$ et on posera pour tout $x \in [-1, +1]$, $g(x) = f(u(x)) - f(u(-x))$)

Problème 2 : une équation fonctionnelle

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions φ pour lesquelles existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x - y|$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés.

I. Question préliminaire :

Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant (E). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka)$$

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na) - \sum_{k=1}^n \lambda^{-k} f(x - ka)$$

II. Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes :

- 1) Montrer que pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g \in \mathcal{L}$ et $\lambda f \in \mathcal{L}$.
- 2) Soit $f \in \mathcal{F}$ dérivable. Montrer que pour que $f \in \mathcal{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée f' soit bornée.
- 3) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}$ bornées. Montrer que leur produit fg est aussi un élément de $\mathcal{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes deux bornées?
- 4) Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq A|x| + B$.
- 5) Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Dans la suite du problème, f désigne une fonction de $\mathcal{L}$.

III. Etude de (E) lorsque $|\lambda| < 1$:

On suppose dans cette partie que $|\lambda| < 1$.

- 1) a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente (on pourra utiliser la question II.4)).

b. En déduire qu'il existe une, et une seule fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (E) et que F est donnée par :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$$

- 2) Nous allons étudier trois cas particuliers :

a. On suppose que f est la fonction $f_1 = 1$. Montrer que $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

b. On suppose que f est la fonction $f_2 : x \mapsto \cos x$. Montrer que $f_2 \in \mathcal{L}$ et que la fonction correspondante F_2 est donnée par :

$$x \mapsto \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}$$

c. On suppose f est la fonction f_3 définie par $f_3 : x \mapsto \sin x$. Montrer que $f_3 \in \mathcal{L}$ et calculer la fonction correspondante F_3 .

IV. Etude de (E) lorsque $\lambda = 1$:

On suppose dans cette partie que $\lambda = 1$.

- 1) Montrer que pour qu'existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (E) il faut que f soit bornée.

2) a. Montrer, en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulle vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x+a) = 0$$

b. Soit $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (E). F est-elle unique?

3) On suppose que dans cette question que f est la fonction $x \longmapsto \cos x$.

a. Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée en

III.2)b.) , on obtient une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (E).

b. Si $a = 2\pi$, établir qu'il existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (E).