



Mathématiques

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N°4

A remettre le mercredi 1er décembre 2004

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée et on hésitera pas à faire référence aux propriétés utilisées.

Théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers $l \in \mathbb{K}$.

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$.

a. On suppose $l = 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sum_{p=1}^{n_0} |u_p|}{n}$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l = 0$.

b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

2) Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n = +\infty$. On pose pour n assez grand

$$v_n = \frac{\sum_{p=1}^n \lambda_p u_p}{\sum_{p=1}^n \lambda_p}$$

a. On suppose $l = 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sum_{p=1}^{n_0} \lambda_p |u_p|}{\sum_{p=1}^n \lambda_p}$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l = 0$.

b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

3) Etendre le résultat de la question 2)b. au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = \pm\infty$.

4) On considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$ convergentes respectivement vers a et b . Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{n+1}$$

5) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$ convergente vers l . Que dire de la suite $w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k u_k$ ($n \in \mathbb{N}$)? (on s'inspirera d'une méthode proche du théorème de Césaro)