



Mathématiques

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N°2

A remettre le lundi 11 octobre 2004

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé.

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée et on hésitera pas à faire référence aux propriétés utilisées.

Il n'est pas interdit d'admettre certains éléments de démonstration (voire des questions entières) afin de ne pas rester bloqué. Mais ils doivent absolument être mentionnés.

On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 :

Le but de ce problème est de dénombrer les surjections entre deux ensembles finis. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \llbracket 1, n \rrbracket$ ($E_0 = \emptyset$). Si n et p sont des entiers positifs ou nuls, $S_{n,p}$ désignera le nombre de surjections de E_n sur E_p .

I. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$.

- 1) Que vaut $S_{n,p}$ si $p > n$? Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, $S_{n,2}$.
- 2) Calculer $S_{p+1,p}$.

II. Soient $p \leq n$.

- 1) Démontrer que si $0 \leq k < p$, $\sum_{q=k}^p (-1)^q C_p^q C_q^k = 0$.

- 2) Etablir $p^n = \sum_{q=1}^p C_p^q S_{n,q}$.

- 3) En déduire la formule

$$S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k C_p^k k^n$$

- 4) En déduire que si $p \geq 2$ $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$. Vérifier que

$$S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}.$$

III. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $A_{n,p}$ le nombre de partitions de E_n en p parties non vides (sans tenir compte de l'ordre) : $A_{n,p}$ est appelé *nombre de Stirling de deuxième espèce*.

- 1) Quelle relation y a-t-il entre $A_{n,p}$ et $S_{n,p}$?
- 2) En déduire une relation donnant $A_{n,p}$ en fonction de $A_{n-1,p}$ et $A_{n-1,p-1}$.

3) Calculer $A_{n,1}$ et $A_{n,n}$.

IV. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle dérangement de E_n toute permutation σ de E_n telle que $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in E_n$. On note D_n le nombre de dérangements de E_n . On pose $D_0 = 1$.

1) Etablir $n! = \sum_{k=0}^n C_n^k D_k$.

2) A l'aide du II.1), en déduire

$$D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k!$$

Problème 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient G un groupe fini d'ordre n dont la loi interne est notée multiplicativement et $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre premier divisant n .

On note 1 l'élément neutre de G , $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in G^p, x_1 x_2 \dots x_p = 1\}$, S le sous-groupe de $\mathcal{S}_p$ engendré par le cycle $[1, 2, \dots, p]$ de longueur p .

Enfin, on définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ de la manière suivante : pour tout $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ dans E , $(x_1, \dots, x_p) \mathcal{R} (y_1, \dots, y_p)$ si et seulement s'il existe $\sigma \in S$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait $y_i = x_{\sigma(i)}$.

1) a. Quelle est la signature de $[1, 2, \dots, p]$?

b. Quel est l'ordre de S ? S est-il abélien?

c. Expliciter S lorsque $p = 5$.

2) a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E$ et $\sigma \in S$. Montrer que $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \in E$ (on commencera à le prouver pour $\sigma = [1, 2, \dots, p]$).

c. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E$ et $H = \{\sigma \in S, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = x_{\sigma(i)}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de S . En déduire que $H = \{1\}$ ou S .

d. Montrer que chaque classe modulo $\mathcal{R}$ possède 1 ou p éléments.

3) a. Calculer $\text{Card} E$.

b. On note r (resp. s) le nombre de classes modulo $\mathcal{R}$ de cardinal 1 (resp. p). Montrer que $n^{p-1} = r + sp$.

4) En déduire l'existence d'un élément de G d'ordre p .

Conclusion : Ainsi, pour tout groupe fini d'ordre n et tout diviseur premier p de n , il existe un élément de G d'ordre p . Ce résultat constitue le lemme de Cauchy.