HX3 Mathématiques

Travaux dirigés

Étude des coniques du plan

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta) \in \mathbb{R}^6$ avec α, β, γ non tous nuls. On se donne une fonction polynômiale de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$P(X) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta \quad \text{pour tout } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté que l'on pourra identifier à $\mathbb{R}^2$. Pour un point $M \in \mathbb{R}^2$, on note $M(x, y)$ lorsque $M = (x, y)$, i.e. x et y sont les coordonnées de M dans la base canonique.

Définition 1 *L'ensemble d'équation $P(M) = 0$ (pour $M \in \mathcal{P}$) est appelée conique du plan $\mathcal{P}$.*

Le but du problème est d'étudier les coniques. L'objectif des trois premières parties est de montrer qu'en changeant les vecteurs de la base du repère, on peut se ramener au cas $\beta = 0$.

On dira qu'une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ est directe si le déterminant de la matrice de passage de la base canonique notée $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est strictement positif. On n'hésitera pas à identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

I. Première partie : matrice de SO (2)

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère $e_1 = \cos\theta \overrightarrow{\imath} + \sin\theta \overrightarrow{\jmath}$ et $e_2 = -\sin\theta \overrightarrow{\imath} + \cos\theta \overrightarrow{\jmath}$. Démontrer que (e_1, e_2) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Démontrer l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que la matrice de passage de la base canonique à (e_1, e_2) soit

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, montrer que $O^{-1} =^t O$.

II. Deuxième partie : diagonalisation des matrices symétriques réelles de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice réelle de taille deux, symétrique. On note pour λ réel $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$.

1) Démontrer que χ est une fonction polynômiale de degré 2 à discrimant positif ou nul.

On note $\lambda \leqslant \mu$ les racines réelles distinctes ou confondues de χ.

2) On suppose $\mu = \lambda$. Démontrer que $A = \lambda I_2$.

On suppose dans la suite de la partie que $\lambda < \mu$. Nous noterons simplement m la matrice réelle de taille 1 égale à (m).

3) Démontrer l'existence de X_1 et X_2 de norme 1 tels que $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \mu X_2$.

4) Soit $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Que représente le réel ${}^tXY$?

5) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tXAY$. Montrer que ${}^tXAY = {}^tYAX$.

6) En calculant de deux manières différentes ${}^tX_2AX_1$ démontrer que X_1 et X_2 sont orthogonaux.

7) Démontrer l'existence d'une base orthonormée directe (e_1, e_2) telle que l'endomorphisme canoniquement associé à A admette une matrice dans (e_1, e_2) égale à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

8) On note θ l'angle orienté entre $\overrightarrow{\imath}$ et e_1. Montrer que $O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $O = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On conclut que pour toute matrice réelle symétrique A de taille 2, on est capable de trouver $\theta \in \mathbb{R}$ telle que si $O = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $O^{-1}AO$ est diagonale. L'endomorphisme canoniquement associé à A est dit diagonisable en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

III. Troisième partie : première réduction de l'équation

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls et

$$Q(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{pour tout } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Comme dans la partie précédente, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tXAX$.

2) Démontrer l'existence d'une base orthonormée directe (e_1, e_2) et de scalaire $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que si $X = x'e_1 + y'e_2$, alors

$$Q(X) = \lambda x'^2 + \mu y'^2.$$

3) Conclure que par un changement de base, on peut supposer $\beta = 0$ dans l'expression de $P(M)$. Donner une méthode pratique pour trouver la nouvelle base.

Dans la suite du problème, on suppose que

$$P(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta.$$

IV. Quatrième partie : l'ellipse

On suppose λ et μ de même signe strict. Quitte à changer $(\lambda, \mu, \delta, \varepsilon, \eta)$ en leur opposé, on peut supposer que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Quitte à faire une rotation de la base de $\frac{\pi}{2}$, on peut supposer $\lambda \leqslant \mu$.

1) Montrer qu'en changeant l'origine du repère, on peut supposer que $\delta = \varepsilon = 0$.

On suppose $P(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \eta$

2) Déterminer $\mathcal{C}$ lorsque $\eta > 0$, puis $\eta = 0$.

On suppose maintenant $\eta < 0$.

3) Montrer qu'il existe $0 < b \leqslant a$ tel que $\mathcal{C}$ ait une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4) Montrer qu'un point $M(x, y) \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = a\cos t$ et $y = b\sin t$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ correspond à l'arc géométique

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

Qu'obtient-on si $a = b$.

5) Construire $\mathcal{C}$. Trouver les axes de symétrie de $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est l'image du cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon a (appelé *cercle principal de* $\mathcal{C}$) par l'affinité de rapport b/a, par rapport à Ox, parallèlement à Oy.

Définition 2 *La courbe d'équation réduite* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *est appelée ellipse. Son grand axe est* a*, son petit axe est* b*, son centre est l'origine, et ses sommets les points* $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ *et* $(0, -b)$.

V. Cinquième partie : l'hyperbole

On suppose désormais λ et μ de signe contraire.

1) Montrer qu'en changeant l'origine du repère, on peut supposer que $\delta = \varepsilon = 0$.

On se ramène donc à $P(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \eta$.

2) Préciser $\mathcal{C}$ lorsque $\eta = 0$.

On suppose dans la suite de cette partie que $\eta \neq 0$.

3) Montrer qu'en faisant éventuellement une rotation de $\frac{\pi}{2}$ de la base, la courbe $\mathcal{C}$ admet une équation du type

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont strictement positifs.}$$

4) Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{C}$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \pm a\mathrm{ch}\ t$ et $y = b\,\mathrm{sh}\, t$. En déduire que $\mathcal{C}$ est la réunion des deux arcs géométriques définis par

$$\begin{cases} x(t) = a\mathrm{ch}\ t \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\, t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = -a\mathrm{ch}\ t \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\, t \end{cases}$$

5) Construire $\mathcal{C}$. Trouver les axes de symétrie de $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes et préciser leur équation.

Définition 3 *La courbe d'équation réduite* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *est appelée hyperbole. Son centre est l'origine, et ses sommets les points* $(a, 0)$, $(-a, 0)$, Ox *son axe transverse.*

VI. Sixième partie : la parabole

On suppose enfin que λ ou $\mu = 0$. Quitte à faire une rotation de la base de $\frac{\pi}{2}$, on peut supposer $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$. Quitte à diviser P par μ, on se ramener à $\mu = 1$:

$$P(M) = y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta.$$

1) Préciser $\mathcal{C}$ lorsque $\delta = 0$.

On suppose désormais dans cette partie $\delta \neq 0$.

2) Montrer qu'en changeant le repère, on peut supposer que $\varepsilon = 0$ et $\eta = 0$ et $\delta < 0$.

On se ramène donc à $P(M) = y^2 - 2px$ avec $p > 0$. La courbe a pour équation $y^2 = 2px$

3) Trouver un paramétrage de la courbe $\mathcal{C}$, ses axes de symétries. Étudier ses branches infinies. Tracer $\mathcal{C}$.

Définition 4 *La courbe d'équation réduite $y^2 = 2px$ est appelée parabole. Son sommet est l'origine et Ox son axe transverse.*

VII. Septième partie : foyer et directrice

On se donne un plan $\mathcal{P}$, un point F, une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par F et un réel $e > 0$. On désire étudier $\mathcal{C}'$ le lieux des points M tels que

$$\frac{MF}{MH} = e,$$

où H désigne le projeté de M sur $\mathcal{D}$. Pour étudier $\mathcal{C}'$, on considère un repère orthonormé direct centré en F qui donne à $\mathcal{D}$ l'équation $x = -d$ où $d = d(F, \mathcal{D})$.

Définition 5 *F est appelé foyer de $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}$ est sa directrice et e son excentricité.*

1) Démontrer que $\mathcal{C}'$ est une conique en précisant son équation cartésienne. Montrer que
- si $e > 1$, $\mathcal{C}'$ est une hyperbole ;
- si $e = 1$, $\mathcal{C}'$ est une parabole ;
- si $0 < e < 1$, $\mathcal{C}'$ est une ellipse.

2) On suppose $0 < e < 1$. Calculer a et b, petit axe et grand axe de $\mathcal{C}'$ en fonction de e et d. Montrer que si l'on se place dans un repère où $\mathcal{C}'$ admet une équation réduite, on a F de coordonnées $(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. En déduire que $\mathcal{C}'$ peut être obtenu par deux couples foyer-directrice : $(F, \mathcal{D})$ ou son symétrique par rapport au centre de $\mathcal{C}'$; Montrer que les directrices ont pour équation $x = \pm\frac{a^2}{c}$ et que $e = \frac{c}{a}$.

Définition 6 *Soit $\mathcal{C}$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ une ellipse et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ sont appelés foyers de $\mathcal{C}$. Les droites $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$ sont appelées directrices de $\mathcal{C}$.*

L'axe Ox est appelé aussi axe focal.

3) On suppose $e > 1$. Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{C}'$ en fonction de e et d en changeant de repère. Calculer a et b en fonction de e et d. On pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Démontrer que $F = (c, 0)$ et que la directrice a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$.

Définition 7 *Soit* $\mathcal{C}$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *avec* $0 < b, a$ *une hyperbole et* $c = \sqrt{a^2+b^2}$. *Les points* $F(c,0)$ *et* $F'(-c,0)$ *sont appelés foyers de* $\mathcal{C}$. *Les droites* $x = \dfrac{a^2}{c}$ *et* $x = -\dfrac{a^2}{c}$ *sont appelées directrices de* $\mathcal{C}$.

L'axe Ox *est appelé aussi axe focal.*

4) On suppose $e = 1$. Montrer que $\mathcal{C}'$ est une parabole, d'équation $y^2 = 2dx$ dans un repère bien choisi centré en le sommet de $\mathcal{C}'$. On pose $p = d$. Vérifier que $F = (\frac{p}{2}, 0)$ et que l'équation de $\mathcal{D}$ est $x = -\frac{p}{2}$.

VIII. Huitième partie : équation polaire d'une conique

On se donne une conique $\mathcal{C}$ d'un plan $\mathcal{P}$ par son foyer F, sa directrice $\mathcal{D}$ et e son excentricité. On note $d = d(F, \mathcal{D})$ la distance de F à $\mathcal{D}$.

Définition 8 *On appelle paramètre de la conique* $\mathcal{C}$ *le réel* $p = ed > 0$.

1) Soit $K > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $\rho = \dfrac{K}{\cos(\theta - \theta_0)}$ correspond à l'équation polaire d'une droite ne passant pas par l'origine. Montrer que $\rho = K\cos(\theta - \theta_0)$ correspond à l'équation polaire d'un cercle passant par l'origine.

2) On choisit un repère orthonormé direct centré en F tel que $\mathcal{D}$ admette $x = d$ pour équation. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet pour équation polaire

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

3) Démontrer que lorsque $\mathcal{C}$ est une ellipse ou une hyperbole $p = \dfrac{b^2}{a}$.

IX. Neuvième partie : définition bifocale des coniques

Soit F et F' deux points distincts de $\mathcal{P}$, distants de $2c$ et $a > 0$. On prend comme origine du repère le milieu de F et F' et le vecteur $\overrightarrow{\imath}$ est porté par (FF'). On considère un point $M(x, y)$.

1) Démontrer

$$MF + MF' = 2a \quad \text{ou} \quad |MF - MF'| = 2a \Longleftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 + a^2c^2 - a^4 = 0.$$

Pour un traitement analytique, on pourra utiliser une calculatrice pour mener les calculs formels.

2) On suppose $a > c$. Montrer que l'ensemble des points M vérfiant $MF + MF' = 2a$ est une ellipse dont les foyers sont F et F', le grand axe a. En déduire une construction pratique de l'ellipse à l'aide d'un fil.

3) On suppose $c > a$. Montrer que l'ensemble des points M vérfiant $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole dont les foyers sont F et F'.

X. Dixième partie : tangentes à une conique

1) On se donne une conique $\mathcal{C}$ qui correspond à une ellipse ou une hyperbole dont l'équation cartésienne s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1.$$

On a vu qu'alors en tout point, la courbe admet localement un paramétrage normal.

Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$ et (x_0', y_0') un vecteur non nul dirigeant la tangente en M_0 correspondant au vecteur dérivé d'un paramétrage.

a. Montrer que $\dfrac{x_0 x_0'}{a^2} + \varepsilon \dfrac{y_0 y_0'}{b^2} = 0$.

b. En déduire que la tangente en M_0 est d'équation $\dfrac{x x_0}{a^2} + \varepsilon \dfrac{y y_0}{b^2} = 1$. C'est le *principe de dédoublement.*

2) On considère une parabole de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F. Montrer que la tangente en un point M de cette parabole est la médiatrice du segment FH où H désigne le projeté de M sur $\mathcal{D}$.

3) Démontrer que la tangente en un point M d'une ellipse de foyers F et F' est la bissectrice extérieure de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ (utiliser la définition bifocale de l'ellipse).

4) Démontrer que la tangente en un point M d'une hyperbole de foyers F et F' est la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ (utiliser la définition bifocale de l'hyperbole).

XI. Onzième partie : compléments

1) Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants de $\mathbb{R}^3$ et C un cercle de $\mathcal{P}$. Montrer que la projection orthogonale de C sur $\mathcal{P}'$ est une ellipse de $\mathcal{P}'$.

2) On considère une conique $\mathcal{C}$ d'équation $P(M) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta$.

a. Démontrer que $4\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$, si et seulement si $\mathcal{C}$ est une ellipse ou une hyperbole.

On note $\Omega(x_0, y_0)$ le centre de $\mathcal{C}$.

b. Démontrer que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Montrer que ce système admet une unique solution.

c. En déduire une méthode pour calculer le centre d'une conique.