HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}1

Samedi 25 septembre 2004

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé.

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée et on hésitera pas à faire référence aux propriétés utilisées.

Il n'est pas interdit d'admettre certains éléments de démonstration (voire des questions entières) afin de ne pas rester bloqué. Mais ils doivent absolument être mentionnés.

On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 : Le théorème de Cantor-Bernstein

I. Soient X un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de X, $\varphi : X \longrightarrow Y$.

1) Montrer que

$$\varphi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \varphi(A_i)$$

2) A t-on $\varphi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i)$? A qu'elle condition sur φ, l'égalité est-elle vraie? Montrer qu'une des deux inclusions est toujours vérifiée.

II. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux injections. On désire prouver que E et F sont équipotents i.e. qu'il existe une bijection $h : E \longrightarrow F$ (Théorème de Cantor-Bernstein).

Pour ce faire, on considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties C de E telles que

$$g\left(F\backslash f(C)\right) \subset E\backslash C$$

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide et que $K = \bigcup_{C\in\mathcal{F}} C$ est dans $\mathcal{F}$.

On pose $H = E\backslash g(F\backslash f(K))$.

2) Montrer que $K \subset H$.

3) Soit $y \in F\backslash f(H)$. Montrer que $g(y) \notin H$. En déduire que $H \in \mathcal{F}$ et puis que $H = K$.

4) Montrer que l'application $h : E \longrightarrow F$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in K \\ g^{-1}(x) \text{ si } x \in E\backslash K \text{ (où } g^{-1}(x) \text{ désigne abusivement l'unique antécédant de } x \text{ par } g) \end{cases}$$

est bien définie et que c'est une bijection de E sur F.

Problème 2 : La formule du crible

Soit X un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$. On définit pour $A \subset X$, $\varphi_A : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ avec $\varphi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\varphi_A(x) = 0$ sinon : φ_A est appelée fonction caractéristique de A. Pour $A \subset X$, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans X.

I. Première partie :

1) a. Soit $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$. Démontrer qu'il existe une unique partie A de X telle que $f = \varphi_A$.

b. Retrouver en le justifiant le cardinal de $\mathcal{P}(X)$.

2) Soit A et B des parties de E.

a. Exprimer en fonction de φ_A et φ_B les fonctions $\varphi_{\bar{A}}$, $\varphi_{A \cap B}$.

b. Même question pour $\varphi_{A \cup B}$.

II. Deuxième partie :

On définit sur E la loi de composition interne $*$ par

$$f * g = f + g - fg = 1 - (1 - f)(1 - g), \quad \text{pour tout } f, g \in E.$$

1) Montrer que $(E, *)$ est un monoïde commutatif. On précisera notamment l'élément neutre.

2) Soit $f_1, \dots, f_n$ n éléments de E.

a. Développer $(1 - f_1)(1 - f_2)$ puis $(1 - f_1)(1 - f_2)(1 - f_3)$.

b. Démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ l'identité

$$\begin{aligned}
(1 - f_1) \cdots (1 - f_n) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} f_{i_1} \ldots f_{i_k} \right) \\
&= 1 - (f_1 + f_2 + \cdots + f_n) + (f_1 f_2 + f_1 f_3 + \cdots + f_{n-1} f_n) - \cdots \\
&\quad \cdots + (-1)^n f_1 f_2 \cdots f_n.
\end{aligned}$$

3) Soit $A_1, \dots, A_n \subset X$. En déduire $\varphi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}$ en fonction de $\varphi_{A_1}, \dots, \varphi_{A_n}$.

III. Troisième partie :

Pour $f \in E$, on définit l'intégrale de f par

$$\int_X f = \sum_{k \in X} f(k) \in \mathbb{Z}.$$

1) Soit $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Exprimer $\int_X (f + g)$ et $\int_X \lambda f$ à l'aide de $\int_X f$ et $\int_X g$.

2) Soit $f \in E$ telle que $f \geqslant 0$ i.e pour tout $k \in X$, $f(k) \geqslant 0$. Vérifier que $\int_X f \geqslant 0$. Que peut-on dire de f si $\int_X f > 0$?

3) Soit $A \subset X$. Que vaut l'intgrale $\int_X \varphi_A$?

4) Conclure que

$$\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$