HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}9

Mercredi 13 avril 2005

\- Durée : 4 heures -

Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Polynômes de meilleure approximation

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace des polynômes réels à une indéterminée (resp. l'espace des polynômes réels à une indéterminée de degré inférieur ou égal à n) qui sera identifié à l'espace des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ (resp. l'espace des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n).

Pour tout espace vectoriel réel V, on dit que $\| \ \|$ est une norme si $\| \ \|$ est une application de V dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

1. pour tout $x \in V$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in V$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. pour tout $x, y \in V$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Pour toute fonction $f \in E$, on note $N(f) = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |f(t)|$. On rappelle que N est une norme sur E.

Étant donnés f et g dans E et $\varepsilon > 0$, on dit que g est une approximation de f à ε près si, et seulement si $N(f-g) \leqslant \varepsilon$.

Étant donnés une fonction f de E et un entier naturel n, on dit que g est un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f si, et seulement si $g \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $h \in \mathbb{R}_n[X]$, $N(f-g) \leqslant N(f-h)$.

Question préliminaire : soit $f, g \in E$. Montrer que $|N(f) - N(g)| \leqslant N(f+g)$.

I. Première partie : convergence uniforme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On se donne n un entier et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose qu'il existe des réels $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1$ tels que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k(x_p) = \lambda_p \in \mathbb{R}$.

1) Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Écrire un polynôme L_p de degré n tel que $L_p(x_p) = 1$ et pour $q \neq p$ dans $[\![0, p]\!]$, $L_p(x_q) = 0$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire le polynôme P_k en fonction des L_p et des valeurs $P_k(x_p)$.

3) Démontrer que la suite P_k converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à préciser.

4) Démontrer que P_k converge uniformément vers P sur le segment $[-1,1]$.

II. Deuxième partie : sous-suite d'une suite bornée de $\mathbb{R}_n[X]$

On se donne n un entier et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N(P_k) \leqslant M$. On désire démontrer de deux manières différentes qu'il existe une sous-suite de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente uniformément.

1) En utilisant la première partie, démontrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(P_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) On se donne des réels $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1$. On pose pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\nu(P) = |P(x_0)| + |P(x_1)| + \cdots + |P(x_n)|$.

a. Démontrer que ν est une norme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On admet le résultat suivant : soit $\| \|_1$ et $\| \|_2$ deux normes d'un espace vectoriel réel V de dimension finie. Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in V$

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1.$$

Redémontrer à l'aide de ce résultat qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(P_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$.

III. Troisième partie :

1) Soit f une fonction de E.

a. Justifier l'existence de $m = \min\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$.

On se donne K un réel et on note K la fonction constante de E égale à K sur $[-1, 1]$.

b. Calculer $N(f - K)$ en fonction de m, M et K.

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme g_0 de meilleure approximation d'ordre 0 de f et donner l'expression de g_0 en fonction de m et M.

2) Soit $f \in E$, $n \in \mathbb{N}$ et $\mu = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} N(f - Q)$.

a. Justifier l'existence de μ et montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $N(f - P_k)\xrightarrow[k\to+\infty]{}\mu$.

b. Conclure à l'existence d'un polynôme g_n de meilleure approximation d'ordre n de f.

3) Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $H \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-1, 1]$, $|f^{(n)}(t)| \leqslant H$. On pose pour $n \geqslant 0$, $S_{n,f} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}X^k$. Montrer que $S_{n,f}$ converge uniformément vers f et que pour tout $\varepsilon > 0$, f admet un polynôme g_ε approximation de f à ε près.

4) Soit $f : t \in [-1, 1] \longmapsto \sin(t)$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $h_\alpha : t \in [-1, 1] \longmapsto \sin(t) - \alpha t$ et $\Phi : \alpha \in \mathbb{R} \longmapsto N(h_\alpha)$.

a. Sans chercher à calculer une expression de Φ à l'aide des fonctions usuelles, montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\Phi(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} + \infty$ et $\Phi(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to-\infty]{} + \infty$.

c. Calculer les valeurs de $\Phi(1)$ et $\Phi(\sin(1))$ et montrer que $\Phi(\sin(1)) < \Phi(1)$.

d. Montrer que Φ admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint pour un réel α_0 et que $\alpha_0 \in [\sin(1), 1[$.

5) a. Montrer qu'il est possible de trouver f, fonction vérifiant les conditions du **3)** et un entier n pour lesquels $S_{n,f}$ ne soit pas un polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n.

b. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ qui approche $f : t \in [-1, 1] \longmapsto \sin(t)$ mieux que tout autre sur $[-1, 1]$ c'est-à-dire tel que pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$, $N(f - Q) \leqslant N(f - R)$.

IV. Quatrième partie :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(u)) = \cos(nu)$ (on partira du fait que $\cos(nu)$ est la partie réelle de $(e^{iu})^n$).

b. Montrer que $\deg T_n = n$ et calculer son coefficient dominant.

c. Montrer que T_n est pair (resp. impair) si n est pair (resp. impair).

d. Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que l'équation $|T_n(x)| = 1$ admet $n+1$ solutions distinctes dans $[-1, 1]$ notées $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Donner une expression de x_k en fonction des entiers k et n.

b. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|T_n(t)| \leqslant 1$.

c. On note F_n la partie de $\mathbb{R}_n[X]$ formée des polynômes unitaires de degré n. On note $\widetilde{T_n} = \dfrac{T_n}{a_n}$ où a_n est le coefficient dominant de T_n. Montrer que pour tout $P \in F_n$, on a

$$N(\widetilde{T_n}) \leqslant N(P)$$

(on pourra étudier le signe des $(\widetilde{T_n} - P)(x_k)$).

d. Soit $P \in F_n$. Montrer que $N(P) = N(\widetilde{T_n})$ si, et seulement si $P = \widetilde{T_n}$.

3) Soit $R \in \mathbb{R}_n[X]$.

a. Montrer qu'il existe $n+1$ réels uniques $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k T_k$.

b. Montrer que le polynôme de meilleure approximation de R d'ordre $n-1$ est le polynôme $R_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k$ (utiliser **2)b.** et **2)c.**).

c. Soit $R = \dfrac{(X+1)^3}{4}$. Déterminer R_2 le polynôme de meilleure approximation d'ordre 2 de R. Représenter sur un même dessin les graphes de R et R_2 sur $[-1, 1]$ (on utilisera un repère orthonormé d'unité 5 cm). Quels sont les abscisses des points d'intersection des deux graphes.

4) Soit $f : t \in [-1, 1] \longmapsto \sin(t)$.

a. Déterminer $S_{5,f}$ et déterminer $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$; dans $\mathbb{R}$ tels que $S_{5,f} = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} c_k T_k$.

b. Déterminer le polynôme de meilleure d'ordre 4 de $S_{5,f}$, soit V_4. Donner l'expression de V_4.

c. Montrer que V_4 est une approximation de f strictement meilleure que $S_{4,f}$ i.e., $N(f - V_4) < N(f - S_{4,f})$ (utilser **2)b.** et **2)c.**).

d. Quel lien existe t-il entre les questions **IV.4)c.** et **III. 5)a.** ?