HX3 **Mathématiques**

Devoir surveillé N^{o}8

Mercredi 23 mars 2005

- Durée : 4 heures -

L'exerice et le problème sont totalement indépendants. L'épreuve se déroule en deux phases : à l'issue d'une heure de composition, un premier ensemble de copie correspondant à l'exercice est rendu. Le second ensemble, correspondant au problème est rendu au bout de 4 heures.

Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Exercice :

On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^4$ $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x + 2y - 2z + t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases} \right\}$ et G le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) Justifier que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

2) Donner un système d'équations cartésiennes de G.

3) a. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires.

b. On note p la projection de F parallèlement à G et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $p(X)$ et la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Que vaut A^2 ?

Problème :

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel V est noté $\mathcal{L}(V)$. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On note $D : Q \in E \longmapsto Q' \in E$ où Q' désigne le polynôme dérivé de Q. On note $D_n : Q \in E_n \longmapsto Q' \in E_n$.

L'objet du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda I_E + D$ est égal au composé d'un endomorphisme g de E avec lui-même ; ainsi que des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda I_{E_n} + D_n$ est égal au composé d'un endomorphisme g de ${}_nE$ avec lui-même.

Les troisième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des première et seconde parties ainsi que des préliminaires.

Préliminaires : noyaux itérés

Soit V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

1) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.

2) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker f^p = \ker f^{p+1}$. Montrer que pour tout $q \geqslant p$, $\ker f^q = \ker f^{q+1}$, puis $\ker f^q = \ker f^p$.

3) On suppose V de dimension finie. Démontrer que la suite $(\ker f^k)_{k \geqslant 0}$ est constante à partir d'un certain p inférieur ou égal à n, où n désigne la dimension de V. Que peut-on dire de $\ker f^n$ et $\ker f^{n+1}$?

4) Soit $u \in \mathcal{L}(V)$. On suppose V de dimension finie n et u nilpotent *i.e.* il existe $q \geqslant 1$ tel que $u^q = 0$. Démontrer que $u^n = 0$.

I. Première partie :

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

1) *Caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g :* soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et un entier p avec $0 \leqslant p \leqslant n$. Démontrer que, s'il existe $g \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $g \circ g = g^2 = \lambda I_{E_n} + D_n$, $g \circ D_n = D_n \circ g$.

Préciser le noyau $\ker D_n^{p+1}$? En déduire, que g laisse stable E_p et qui si g_p est l'endomorphisme induit par g sur E_p, on a $g_p^2 = \lambda I_{E_p} + D_p$.

b. On suppose qu'il existe un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda I_E + D$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace E_n est stable par g. En déduire que si g_n désigne la restriction de g à E_n, $g_n^2 = \lambda I_{E_n} + D_n$.

c. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 = \lambda I_E + D$.

α. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n+1$ stable par D. Démontrer que D_F, l'endomorphisme induit par D par F, est nilpotent.

En déduire que le sous-espace F est égal à E_n.

β. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stable par D

γ. Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par g, il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

2) *Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$.*

a . À quelle condition nécessaire sur le réel λ est-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbb{R}$ tel que $g^2 = \lambda I_{E_0} + D_0$.

b . Soit $\lambda < 0$. Déduire de ce qu'il précède qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda I_E + D$ et qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = \lambda I_{E_n} + D_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

3) *Une représentation matricielle simple de D_n :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note A_λ la matrice de coefficients a_{ij}, $(0 \leqslant i, j \leqslant n)$de taille $n+1$ définie par $a_{ii} = \lambda$, $a_{i,i+1} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $j \neq i$ ou $j \neq i+1$. Autrement dit, on a

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a. Soit V un espace vectoriel de dimension finie $n+1$ et $f \in \mathcal{L}(V)$. On suppose que $f^{n+1} = 0$ et $f^n \neq 0$. Démontrer qu'il existe un vecteur y de V telle que $\mathcal{B} = (f^n(y), f^{n-1}(y), \dots, f(y), y)$ soit libre. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}_n$ de E_n pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à $\lambda I_{E_n} + D_n$ dans cette base.

4) *Un exemple.* On suppose dans cette question que $n = 2$.

a. Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 (ce sont les endomorphismes de la forme $aI_{E_2} + bD_2 + cD_2^2$).

b. En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation $g^2 = \lambda I_{E_2} + D_2$. Déterminer les matrices de taille 3 qui vérifie $G^2 = A_1$.

II. Deuxième partie :

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul. Dans cette partie, l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

1) *Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$.*

a. Montrer que, s'il existe un endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = D_n$, alors g est nilpotent et la dimension du noyau $\ker g^2$ est supérieure ou égale à 2.

b. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = D_n$.

c. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que $g^2 = D$.

2) *Existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$.*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^k = D^m$.

a. L'endomorphisme D est-il surjectif ? Démontrer que g est surjectif.

b. Démontrer que les sous-espaces $\ker g^q$ ont des dimensions finies lorsque l'entier q est inférieur ou égal à k.

c. Soit $2 \leqslant p \leqslant k$ un entier. Soit Φ l'application définie dans l'espace $\ker g^p$ par la relation

$$\Phi : P \longmapsto g(P).$$

Démontrer que cette application Φ est linéaire de $\ker g^p$ dans $\ker g^{p-1}$. Quel est le noyau de Φ ? Démontrer que Φ est surjective *i.e.* $\operatorname{im} \Phi = \ker g^{p-1}$.

En déduire une relation entre les dimensions de $\ker g^p$ et $\ker g^{p-1}$. Quelle est la dimension de $\ker g^p$ en fonction de la dimension de $\ker g$.

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de **II.1)c.**

III. Troisième partie :

L'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel E_n est muni de la base $\mathcal{B}_n$ définie à la question **I.3)b.** La matrice associée à l'application I_{E_n} est la matrice I_{n+1} ; la matrice associée à l'endomorphisme D_n est désignée par le même symbole D_n.

Étant donné $\lambda > 0$, on considère L_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui, au réel t associe la matrice $L_n(t)$ définie pas

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} D_n^k.$$

1) *Dérivée de l'application $(L_n(t))^k$.*

a. Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + tD_n$ est inversible et que son inverse, noté $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) D_n^k.$$

Déterminer les fonction $a_k : t \longmapsto a_k(t)$.

b. Démontrer $t \longmapsto (I_{n+1}+tD_n)^{-1}$ est dérivable ; exprimer sa dérivée à l'aide des matrices $(I_{n+1}+tD_n)^{-1}$ et D_n.

c. Démontrer que pour tout t réel, $[L_{n+1}(t)]^{n+1} = 0$.

d. Calculer la fonction dérivée $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_n(t)$ de la fonction $t \longmapsto L_n(t)$ au moyen des matrices D_n et $(I_{n+1}+tD_n)^{-1}$.

e. Étant donné un entier naturel k donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L_n(t)]^k$ de la fonction $t \longmapsto [L_n(t)]^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $(I_{n+1}+tD_n)^{-1}$.

2) *Matrice* $\varphi_u(t)$. Étant donné un réel u, soit $\varphi_u(t)$ la matrice définie par la relation suivante

$$\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}[L_n(t)]^k.$$

a. Démontrer qu'étant donnés deux réels u et v, on a $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t)$.

b. Démontrer que la fonction $t \longmapsto \varphi_u(t)$ est dérivable et que

$$\varphi_u'(t) = u(I_{n+1}+tD_n)^{-1}D_n\varphi_u(t).$$

c. Dans cette question, le réel u est égal à 1. Démontrer que $\varphi_1'' = 0$. En déduire la relation

$$\varphi_1(t) = I_{n+1}+tD_n.$$

3) *Existence de l'endomorphisme g :*

a. Soit $\lambda > 0$. En utilisant les résultats de la question précédente et en remarquant la relation $\lambda I_{n+1} + D_n = \lambda\left(I_{n+1} + \dfrac{1}{\lambda}D_n\right)$, démontrer qu'il exisre $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$M^2 = \lambda I_{n+1} + D_n.$$

Exprimer M avec une matrice $\varphi_u(t)$. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E_n tel que

$$g^2 = \lambda I_{E_n} + D_n.$$

b. Retrouver les matrices obtenues à la question **I.4).**

IV. Quatrième partie :

1) Soit $h : x \in]-1,+\infty[\longmapsto \sqrt{1+x}$.

a. Déterminer la suite $(b_p)_{p\geqslant 0}$ telle pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h(x) = \sum_{p=0}^{n} b_p x^p + o(x^n),$$

lorsque x tend vers 0 (on exprimera le coefficient b_p en fonction du coefficent binomial $C_{2(p-1)}^{p-1}$).

b. Démontrer grâce à la théorie des développements limités que

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p b_{n-p} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \text{ ou } 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2) *Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = \lambda I_E + D$ avec $\lambda > 0$.*
Soit $\lambda > 0$.

a. Soit T l'application définie dans E par la relation

$$T(P) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p(P) \text{ pour } P \in E.$$

Démontrer que T est un endomorphisme de E.

b. Calculer pour tout polynôme P de E son image par $T \circ T = T^2$.

c. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de$E$ vérifiant $g^2 = \lambda I_E + D$.

d. En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un endomorphisme g_n de l'espace vectoriel E_n tel que $g_n^2 = \lambda I_{E_n} + D_n$.

Exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n. Retrouver les matrices obtenues à la question **I.4)**.