HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}7

Samedi 19 février 2005

- Durée : 4 heures -

L'exerice et le problème sont totalement indépendants. La question **7)** *de l'exercice et la partie* **V.** *du problème ne sont pas à traiter en temps limité. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.*

Exercice : transvections et centre du groupe linéaire

On considère E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K. Un endomorphisme u de E est appelé *transvection de* E s'il existe $l : E \longrightarrow K$ une forme linéaire non nulle et a un vecteur non nul tels que $l(a) = 0$ et pour tout $X \in E$,

$$u(X) = X + l(X)a.$$

1) On suppose dans cette question uniquement que $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $l(X) = 2x - y + z$. Exprimer $u(X)$.

2) Soit u une transvection de E.

a. Démontrer que $u \in \mathrm{GL}\,(E)$.

b. Préciser $\mathrm{im}\,(u - I_E)$.

c. Démontrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Soit u un endomorphisme de E, différent de l'identité, tel qu'il existe un hyperplan H tel que $u_{|H} = I_H$ et $\mathrm{im}\,(u - I_E) \subset H$. Démontrer que u est une transvection.

On dit alors que u est une *transvection d'hyperplan H et de droite $D = im\,(u - I_E)$*.

4) Soit u une transvection d'hyperplan H et de droite D et $v \in \mathrm{GL}\,(E)$. Démontrer que $v \circ u \circ v^{-1}$ est une transvection dont on précisera l'hyperplan et la droite.

5) Soit $v \in \mathrm{GL}\,(E)$ tel que pour toute droite D de E, $v(D) = D$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $v = \lambda I_E$.

6) Déterminer le centre de GL (E) i.e. les automorphismes v de E tel que pour tout $u \in \mathrm{GL}\ (E)$, $v \circ u = u \circ v$.

7) Soit u et u' deux transvections d'hyperplans respectifs H et H' et de droites respectives D et D'. Démontrer l'existence de $v \in \mathrm{GL}\ (E)$ tel que $u' = v \circ u \circ v^{-1}$.

Problème : matrices magiques

p et q désignant des nombres entiers relatifs, $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs compris au sens large entre les nombres p et q, autrement dit :

$$[\![p, q]\!] = \{m \in \mathbb{Z},\ p \leqslant m \text{ et } m \leqslant q\}$$

Par ailleurs, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$; $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ; I_n la matrice identité ; si k et l sont $[\![1, n]\!]$, E_{kl} désigne la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k-ième ligne et la l-ième colonne vaut 1 et dont tous les autres sont nuls.

On rappelle que la famille $(E_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (ou $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ en cas d'ambiguïté)

$$M = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ij} E_{ij}$$

La lettre K désignant un réel, on définit :

$$L_K = \left\{ (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall i \in [\![1, n]\!] , \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = K \right\},\quad L = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} L_K$$

$$C_K = \left\{ (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall j \in [\![1, n]\!] , \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = K \right\},\quad C = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} C_K$$

Une matrice $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* d'ordre n lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- $(P1)$ $\{m_{ij}, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\} = [\![1, n^2]\!]$;
- $(P2)$ Il existe un réel K tel que $M \in L_K \cap C_K$ et

$$\sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,n+1-k} = K$$

On appellera *antidiagonale* l'ensemble des coefficients $m_{k,n+1-k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des matrices appartenant à $L \cap C$ et des matrices magiques d'ordre n, avec, notamment, une construction de certaines d'entre elles dans le cas où n est impair.

Question préliminaire :

Montrer que si M est une matrice magique d'ordre n, le réel K dont la propriété $(P2)$ affirme l'existence vaut nécessairement $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Dans toute la suite, on note $K_n = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

I. Première partie : étude des matrices magiques d'ordre 2 et 3

1) Montrer qu'il n'existe pas de matrice magique d'ordre 2.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice magique d'ordre 3.

a. Etablir l'inclusion de l'ensemble $\{1, 9\}$ dans l'ensemble $\{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$.

b. En déduire l'ensemble des matrices magiques d'ordre 3.

II. Deuxième partie : étude de l'espace vectoriel $L \cap C$

1) a. Montrer que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par la famille de matrices $(E_{ij} - E_{in})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]}$.

b. En déduire la dimension de L_0.

c. Retrouver la dimension de L_0 par une autre méthode, en considèrant :

$$\Phi : M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{n} m_{1j}, \sum_{j=1}^{n} m_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} m_{nj} \right) \in \mathbb{R}^n$$

d. Soit K un réel. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0.

e. En déduire que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2) a. Soit $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}(E_{ij} - E_{in})$ appartenant à L_0. Montrer que M appartient à C_0 si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$.

b. En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (après avoir succintement justifié que $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel).

3) a. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

b. En déduire la dimension de $L \cap C$.

III. Troisième partie : étude d'un groupe associé à certaines permutations

Etant donnée une permutation quelconque σ de $[\![1,n]\!]$, on note A_σ la matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$, ce dernier symbole dit " de kronecker " étant défini par la relation :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On note $\mathcal{S} = \{A_\sigma, \sigma \in \mathcal{S}_n\}$.

1) Soit σ un élément de $\mathcal{S}_n$ et $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter le terme général de la matrice $A_\sigma M$, puis le terme général de la matrice MA_σ.

2) Montrer que $\mathcal{S}$ muni de la multiplication matricielle est isomorphe à $\mathcal{S}_n$ muni de la loi $\circ$.

3) a. Soit K un réel. Montrer que, pour toute matrice M appartenant à $L_K \cap C_K$ et toutes permutations σ et σ' de $[\![1,n]\!]$, $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K \cap C_K$.

b. On note Φ_n l'ensemble des permutations σ de $[\![1,n]\!]$ telles que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\sigma(n+1-k) = n+1-\sigma(k)$$

Soit $\sigma \in \Phi_n$. Montrer que si M est une matrice magique d'ordre n, alors $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ en est aussi une.

4) On note $\mathcal{T}$ l'ensemble $\{A_\sigma, \sigma \in \Phi_n\}$.

a. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}$.

b. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{T}$.

IV. Quatrième partie : construction de matrices magiques d'ordre n impair non multiple de 3

On suppose dans cette partie que n est un nombre entier impair non multiple de 3.

1) Montrer qu'il existe un entier m premier avec n tel que, pour tout quadruplet (i, j, k, l) appartenant à $\mathbb{Z}^4$, on ait l'équivalence :

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j \ \ [n] \\ l \equiv i + 2j \ \ [n] \end{cases} \iff \begin{cases} i \equiv m(2k - l) \ \ [n] \\ j \equiv m(2l - k) \ \ [n] \end{cases}$$

Ainsi, pour tout couple (k, l) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, il existe un et un seul couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$ tel que :

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j \ \ [n] \\ l \equiv i + 2j \ \ [n] \end{cases}$$

On note alors $i = \alpha(k, l)$ et $j = \beta(k, l)$.

2) Pour tout entier relatif k, on note $\bar{k}$ la classe d'équivalence de k dans l'anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

a. Soient u et v deux entiers relatifs, u non nul. Montrer que si u et n sont premiers entre eux, l'application $x \longmapsto \bar{u}x + \bar{v}$ est une bijection de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même.

b. En déduire que, pour tout l appartenant à $[\![1, n]\!]$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha(k, l)$ est constante. Préciser sa valeur en fonction de n.

Soit $W = (w_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$:

$$w_{ij} = n(i - 1) + j$$

Soit $G = (g_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant pour tout (k, l) dans $[\![1, n]\!]^2$:

$$g_{kl} = w_{\alpha(k,l),\beta(k,l)}$$

3) Construire G dans le cas $n = 5$.

Dans la suite, l'entier n n'est plus supposé égal à 5.

4) a. Montrer que l'ensemble des coefficients de G est $[\![1, n^2]\!]$.

b. Montrer que G est une matrice magique d'ordre n.

V. Cinquième partie : composition de matrices magiques. Cas où n est un multiple de 3

Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 3. A partir d'une matrice magique $A = (a_{kl})_{1 \leqslant k,l \leqslant p}$ d'ordre p et d'une matrice magique $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant q}$ d'ordre q, on considère la matrice carrée $D = (D_{uv})_{1 \leqslant u,v \leqslant pq}$ de taille pq vérifiant pour tout (k, l) dans $[\![1, p]\!]^2$ et tout (i, j) dans $[\![1, q]\!]^2$:

$$d_{(i-1)p+k,(j-1)p+l} = a_{kl} + (b_{ij} - 1)p^2$$

1) Construire D dans le cas particulier où les matrices A et B sont égales à $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que, pour toutes matrices magiques A et B d'ordres respectifs p et q, D est une matrice magique d'ordre pq.

3) On suppose n impair. Montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre n n'est pas vide.

En considérant certaines opérations de groupes sur l'ensemble des matrices magiques, on démontre que le cardinal des matrices magiques d'ordre n est toujours divisible par 8.