HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}6

Samedi 29 janvier 2005

- Durée : 3 heures -

Les trois exercices et le problème sont totalement indépendants.

On laissera une marge à gauche. On portera un grand soin à la rédaction. On utilisera du papier millimétré pouur le tracé de l'exercice 1. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Exercice 1 :

On considère l'arc Φ dun plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ défini par

$$x(t) = 2t + t^2 \quad \text{et} \quad y(t) = 2t - \frac{1}{t^2}.$$

1) Dresser le tableau de variations.
2) Réperer et donner la nature des points stationnaires.
3) Étudier les branches infinies.
4) Un tracé rapide suggère un point double. Déterminer ce point double.
5) Tracer soigneusement l'arc Φ.

Exercice 2 :

Dans ce problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note (E_n) l'équation définie pour $x > 0$ par $\dfrac{\ln(x)}{x} + x = n$.

1) a. Démontrer que (E_n) possède une unique solution $x_n > 1$.
b. Démontrer que pour $n \geqslant 2$, $n - 1 \leqslant x_n \leqslant n$.
2) a. Quelle est la limite de x_n ? Donner un équivalent simple de x_n.
b. Trouver un équivalent simple de $x_n - n$. En déduire un développement asymptotique de x_n de deux termes.
c. Écrire un développement asymptotique de x_n de trois termes.

Exercice 3 :

Soit $x \in]0, 1]$. On pose pour $n \geqslant 1$

$$u_n = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \text{et} \quad v_n = \ln u_n.$$

1) Calculer $v_{n+1} - v_n$.

2) Exprimer an fonction de x la constante a telle que

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}.$$

3) Déduire de l'équivalent donné à la question précédente que v_n converge.

4) Démontrer que u_n converge vers une limite l strictement positive.

<u>Problème</u> : la méthode de Newton

On s'intéresse dans ce problème à des méthodes itératives de recherche de valeur approchée d'équation du type $f(x) = 0$.

I. Première partie :

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que

1. $f(a) < 0$ et $0 < f(b)$;
2. $f' > 0$;
3. $f'' > 0$.

1) Justifier l'existence d'un unique $l \in]a, b[$ tel que $f(l) = 0$.

2) On pose $u_0 = b$ et on considère le point de coordonnées $(u_1, 0)$ correspondant à l'intersection de l'axe des x avec la tangente à la courbe de f issue du point d'abscisse $u_0 = b$.

a. Faire une figure représentative.

b. Exprimer u_1 en fonction de u_0.

c. Par des arguments de convexité, démontrer que $u_1 \in]l, u_0[$.

On construit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: le point de coordonées $(u_{n+1}, 0)$ correspond à l'intersection de l'axe des x avec la tangente à la courbe de f issue du point d'abscisse u_n.

3) Faire apparaître $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite F-récurrente avec F à préciser.

4) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Cette suite offre des approximations de la solution de l'équation $f(x) = 0$: c'est la *méthode de Newton.*

6) Démontrer avec toutes les justifications nécessaires qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, F-récurrente avec $U_0 \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. Deuxième partie :

On reprend les notations de la première partie.

1) a. Démontrer l'existence de $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \geqslant m$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $c \in]l, u_n[$ tel que

$$f(u_n) + (l - u_n)f'(u_n) + \frac{f''(c)}{2}(l - u_n)^2 = 0.$$

c. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - l| \leqslant \frac{M}{2m}|u_n - l|^2.$$

On pose $K = \dfrac{M}{2m}$ et $v_n = K|u_n - l|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $n \geqslant 1$. Majorer v_n en fonction de v_{n-1}, puis en fonction de v_0 et n.

3) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose $v_0 < 1$. À partir de quel rang n_0 aura t-on $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Commenter ce résultat.

III. Troisième partie :

Soit $a = 1 < \alpha < b$, $f : x \in [1, b] \longmapsto x^2 - \alpha$.

1) Vérifier que f satisfait aux conditions données à la première partie.

2) Exprimer la relation de récurrence que vérifie la suite définie par la méthode de Newton pour trouver le zéro de f (voir **I.**).

3) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{\alpha}$.

4) Prouver pour que $n \geqslant 0$

$$|u_{n+1} - \sqrt{\alpha}| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} |u_n - \sqrt{\alpha}|^2$$

5) Quel rang n_0 fournit une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-15} près ?

6) Écrire une procédure baptisée *newton* qui prendra en argument, f, x, b et un entier d et qui renverra le premier entier n tel que $|u_n - u_{n-1}| \leqslant 10^{-d}$ ainsi que la valeur u_n.

IV. Quatrième partie :

Soit $\alpha > 0$. On considère désormais une fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \alpha - \dfrac{1}{x}$.

1) Calculer pour $x > 0$, $F(x)$ associé à la fonction f comme en **I. 3)**.

2) Montrer que $]0, 2/\alpha[$ est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ stable par F.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ F-récurrente.

3) Montrer que si $0 < u_0 < 2/\alpha$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

4) On prolonge F en une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}$ tout entier. Que se passe t-il si $u_0 = 0$, $u_0 = 2/\alpha$ et $u_0 \notin [0, 2/\alpha]$?