HX3 **Mathématiques**

Devoir surveillé N^{o}5

Samedi 8 janvier 2005

- Durée : 4 heures -

Les deux exercices et les trois problèmes sont totalement indépendants. L'épreuve se déroule en deux phases. Au bout d'une heure et quinze minutes est relevé un premier ensemble de copie correspondant aux deux exercices. Le deuxième ensemble de copie correspond aux trois problèmes, il est relevé au bout de quatre heures.

On laissera une marge à gauche. On portera un grand soin à la rédaction. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Exercice 1 :

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. On désire montrer par l'absurde que f est identiquement nulle. On suppose donc qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On pose

$$\alpha = \sup\{t \in [a, b],\ \ t < x_0 \text{ et } f(t) = 0\} \quad \text{et} \quad \beta = \inf\{t \in [a, b],\ \ x_0 < t \quad \text{et} \quad f(t) = 0\}.$$

a . Démontrer que $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$.
b . Que valent $f(\alpha)$ et $f(\beta)$?
c . Aboutir à une contradiction.

2) Montrer que f est une application affine (i.e. de la forme $x \longmapsto \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

3) Que peut-on dire si l'on remplace $[a, b]$ par un intervalle I quelconque ?

Exercice 2 :

Soient $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$

Probleme 1 :

On pose pour x réel non nul, $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

1) Montrer que f est bien définie et se prolonge par continuité en 0.

Nous noterons encore f le prolongement obtenu.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. Donner les limites et des équivalents de f aux bornes du domaine de définition.

4) Tracer avec soin le graphe de f.

On pose $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

5) Calculer $f(2) - f(-2)$.

6) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Donner une représentation graphique.

Problème 2:

Soit $a > 0$. On appelle $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [0, a]$, $|f(x)| \leqslant Ax$.

I. Première partie

1) Soit $f \in \mathcal{L}$.

a. Que vaut $f(0)$?

b. Montrer que f est continue en 0.

2) Soit $g : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(0) = 0$. Démontrer que $g \in \mathcal{L}$.

3) On suppose dans cette question que $a = \dfrac{\pi}{2}$ et on considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad \text{si } x \in]0, a] \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$

a. Démontrer que g est continue sur $[0, a]$.

b. Démontrer que g est dans $\mathcal{L}$.

II. Deuxième partie :

On se donne φ une fonction de $\mathcal{L}$ à valeurs positives ou nulles. On note pour $x \in [0, a]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0, a]$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $u(x)$ sa limite.

2) Démontrer que $u : x \in [0, a] \longmapsto u(x)$ est dans $\mathcal{L}$.

On considère l'équation fonctionnnelle (E) suivante

$$\forall x \in [0, a], \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x).$$

3) Montrer que u vérifie (E).

4) Soit $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (E). On suppose $f(0) = 0$ et f continue en 0. On pose $h = f - u$.

a. Démontrer que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

b. Que peut-on dire de h ?

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que (E) possède une unique solution f continue en 0 et vérifiant $f(0) = \lambda$.

6) Soit $\alpha \geqslant 1$. On considère la fonction $\varphi_\alpha : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\varphi_\alpha(x) = x^\alpha \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(0) = 0.$$

a. Montrer que $\varphi_\alpha \in \mathcal{L}$.

b. Déterminer l'unique application $f \in \mathcal{L}$ vérifiant (E) pour $\varphi = \varphi_\alpha$.

Problème 3 : points de franchissement des fonctions continues

Dans tout le problème, u désigne un nombre réel. On considère C_u l'ensemble des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles, telles que :

1. $f(0) \neq u$,
2. $f(1) \neq u$,
3. f n'est constante égale à u sur aucun sous-intervalle ouvert non vide de $[0,1]$.

Soit $f \in C_u$. On appelle *point de franchissement vers le haut du niveau u*, un point t_0 de $]0,1[$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$(\forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[)\ (f(t) < u) \quad \text{et} \quad (\forall t \in]t_0, t_0 + \varepsilon[)\ (f(t) > u)$$

On appelle *point de franchissement vers le bas du niveau u*, un point t_0 de $]0,1[$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$(\forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[)\ (f(t) > u) \quad \text{et} \quad (\forall t \in]t_0, t_0 + \varepsilon[)\ (f(t) < u)$$

On dit enfin que f admet un *point de franchissement du niveau u en* $t_0 \in]0,1[$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(t_1, t_2) \in (]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\cap [0,1])^2$ tel que :

$$[f(t_1) - u][f(t_2) - u] < 0$$

I. Généralités :

1) Montrer qu'un point de franchissement vers le haut (resp. vers le bas) est un point de franchissement.

2) Montrer que si t_0 est un point de franchissement de niveau u, alors $f(t_0) = u$.

3) Soit $t_0 \in]0,1[$. On suppose que $f(t_0) = u$, f dérivable en t_0 et $f'(t_0) > 0$. Que peut-on dire du point t_0 ? Justifier.

4) Exemples élémentaires : on suppose $u = 0$. Indiquer si le point $t = \frac{1}{2}$ est un point de franchissement vers le haut, vers le bas, ou n'est pas un point de franchissement dans les cas suivants :

a. $f : x \in [0,1] \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

b. $f : x \in [0,1] \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^3$.

c. $f : x \in [0,1] \longmapsto 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

d. $f : x \in [0,1] \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

e. $f : x \in [0,1] \longmapsto \left| x - \frac{1}{2} \right|$.

5) Exhiber un exemple d'une fonction admettant un point de franchissement qui n'est ni vers le haut, ni vers le bas. Montrer qu'en général une telle fonction prend une infinité de fois la valeur u sur n'importe quel voisinage d'un tel point de franchissement.

6) On appelle *point de tangence du niveau u* un point t_0 tel que $f(t_0) = u$ et tel qu'en ce point f n'admet pas de point de franchissement du niveau u. Montrer qu'un point de tangence est un extremum local.

7) Soit $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$. Montrer que si $f(t_1) > u$ et $f(t_2) < u$, il y a au moins un point de franchissement entre t_1 et t_2.

II. Polygonation :

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) \neq u$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :

1. f_n est affine sur $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ (i.e. il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, $f_n(x) = \alpha x + \beta$).

2. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2^n$, $f_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = f\left(\frac{k}{2^n}\right)$.

La fonction f_n est appelée *polygonation d'ordre n de f*.

1) Montrer que $f_n \in C_u$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_u (resp. F_u^n) le nombre de points de points de franchissement du niveau u par f (resp. f_n), ce nombre pouvant être infini (F_u et F_u^n sont dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

2) Montrer que $F_u^n \leqslant F_u$.

3) Montrer que la suite $(F_u^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (il est possible d'utiliser la question précédente).

4) On suppose F_u fini.

a. Montrer qu'il existe F_u intervalles ouverts deux à deux disjoints, I_1, I_2,..., I_{F_u} qui contiennent chacun un point de franchissement de niveau u et un seul.

b. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant F_u$, il existe deux intervalles ouverts non vides J_i et K_i tels que :

$$J_i \subset I_i, \quad K_i \subset I_i$$

$$(\forall x \in J_i)(f(x) - u > 0) \quad \text{et} \quad (\forall x \in K_i)(f(x) - u < 0)$$

c. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} F_u^n = F_u$.

5) On suppose que F_u est infini. Montrer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_u^n = F_u$.

En conclusion, dans tous les cas, on a montré :

$$\lim_{n \to +\infty} F_u^n = F_u$$