# HX3 Mathématiques

# Devoir surveillé N$^o$4

Samedi 4 décembre 2004

- Durée : 3 heures -

*On laissera une marge à gauche. On portera un grand soin à la rédaction. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.*

## Limite supérieure et limite inférieure

On notera $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites bornées réelles. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On rappelle que $l \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $l$. On pourra également utiliser la caractérisation suivante : $l$ est une valeur d'adhérence si, et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall N \geqslant 0)\ (\exists n \geqslant N)\ (|u_n - l| \leqslant \varepsilon)$$

### I. Généralités :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{B}$ et $X$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

**1)** Montrer que $X$ est bornée.

**2)** Que dire de $X$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

**3)** Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $l$ est une valeur d'adhérence si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant \varepsilon\}$ est infini.

**4)** Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On note $X'$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{B}$ et que $X' \subset X$.

**5)** Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - w_n$. On note $X'$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{B}$, puis que $X' = X$.

### II. Définition de la limite supérieure et de la limite inférieure

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$. On note pour $n \geqslant 0$, $U_n = \inf\limits_{p \geqslant n} u_p$, $V_n = \sup\limits_{p \geqslant n} u_p$ et $X$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**1)** Justifier l'existence des suites $(U_n)_{n\geqslant 0}$ et $(V_n)_{n\geqslant 0}$ et étudier leur monotonie.

**2)** Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans la suite du problème, on appellera limite supérieure des $u_n$ la limite de $V_n$, et limite inférieure des $u_n$ la limite de $U_n$. On notera :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} V_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n$$

Ces quantités sont donc toujours définies pour une suite bornée, contrairement à la limite.

**3)** Montrer que $X \subset \left[\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n, \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n\right]$.

**4)** Prouver que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ sont dans $X$. En déduire que $X$ admet un plus petit et un plus grand élément.

**5)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$. Que vaut alors le limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**6) a.** Enoncer puis démontrer la réciproque de la question **I.2)**.

**b.** Donner un exemple montrant que cette réciproque est fausse si $u$ n'est pas supposée bornée.

**7)** Pour chacune des suites suivantes, déterminer $X$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ :

**a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

**b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est le reste de $n$ modulo 4.

**c.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(nx\pi)$ où $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

**d.** $n \longmapsto u_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

## III. Propriétés des limites supérieures et inférieures :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{B}$.

**1) a.** Montrer que la suite de terme général $u_n + v_n$ est encore dans $\mathcal{B}$.

**b.** Démontrer que :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} u_n + v_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n + v_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n$$

**c.** Donner un exemple où les inégalités ci-dessus sont strictes.

**2)** Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} -u_n = -\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} -u_n = -\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**3)** On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$. Montrer que :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} v_n$$

## IV. Applications à deux exemples :

**1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifient pour tout $k$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$. A l'aide de la notion de limite supérieure et inférieure, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

**2)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$. On suppose que $\varepsilon_n = u_{n+1} - u_n - u_n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ converge vers 0. On se propose de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**a.** En utilisant une suite extraite, montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Dans la suite de cette partie, on pose $l = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**b.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x \geqslant -\dfrac{1}{4}$.

**c.** Etablir l'existence de $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} + u^2_{\varphi(n)}$ converge vers $l$. En déduire $l \geqslant -\dfrac{1}{4}$.

**d.** Etablir l'existence d'un rang $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_{\varphi(n)} \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

**e.** On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $w_n = u_{\varphi(n)} + u^2_{\varphi(n)}$. Exprimer $u_{\varphi(n)}$ en fonction de $w_n$ et conclure.

## V. Limites supérieures et inférieures de la transformée de Césaro :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$. On pose pour $n \geqslant 0$ :

$$y_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$$

**1)** Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$.
**2)** Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
**3) a.** Démontrer l'inégalité :

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} y_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} y_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

On pourra pour cela considérer la suite $V_n = \sup_{p\geqslant n} x_p$ $(n \geqslant 0)$ et montrer que pour tout $N \geqslant 0$, $\limsup_{n\to+\infty} y_n \leqslant V_N$.

**b.** Retrouver le résultat de la question **2)**.

**4) a.** Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ vérifie $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $X$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un segment.

On note $Y$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**b.** Déduire de ce qui précède que $Y$ est un segment.

**c.** L'application de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ qui a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe sa transformée de Césaro $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme il est défini au début de cette partie est-elle bijective ? injective ?

**5)** Soit $a \leqslant b$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ et telle que $Y = [a,b]$.