HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}3

Samedi 13 novembre 2004

- Durée : 4 heures -

Les quatre exercices et les quatre problèmes sont totalement indépendants. L'épreuve se déroule en deux phases. Au bout d'une heure et vingt minutes est relevé un premier ensemble de copie correspondant aux quatre exercices. Le deuxième ensemble de copie correspond aux quatre problèmes, il est relevé au bout de quatre heures. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé.

On laissera une marge à gauche. On portera un grand soin à la rédaction. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Exercice 1 :

Quel est le dernier chiffre (en base 10) de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

Exercice 2 :

Soit $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions majorées. Montrer que $f+g$ est majorée et

$$\sup_{x\in X}(f+g)(x) \leqslant \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x).$$

Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

Exercice 3 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0.$$

Exercice 4 :

Calculer pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx.$$

Problème 1 : nombres de Mersenne

1) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est un nombre premier, $a = 2$ et n est premier.

On note pour p premier, $M_p = 2^p - 1$: les M_p sont appelés *nombres de Mersenne.*

L'étude de la primalité de $a^n - 1$ se ramène à l'étude des M_p. En 1644, Mersenne affirma que M_p était premier pour $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ et composé pour les autres valeurs de p premier inférieur à 257. Mais en 1806, Pervasin et Seelhoff démontrèrent que M_{61} était premier. En 1876, Lucas établit un méthode pour tester la primalité des M_p (et prouva ainsi que M_{127} était premier). Durant l'été 1999, une équipe de trois mathématiciens japonais a prouvé que $M_{6972593}$ était premier : c'est le plus grand entier premier connu, il s'écrit avec 2098960 *chiffres.*

D'autre part, pour $n \geqslant 1$, on pose $\sigma(n) = \displaystyle\sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs positifs de n.

2) Écrire un programme qui prend n en argument et renvoie $\sigma(n)$.

On dit que n est *parfait* si $\sigma(n) = 2n$: par exemple $n = 6$ est parfait.

3) a. Soit $n \geqslant 1$, $n' \geqslant 1$ deux entiers premiers entre eux. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note D_k l'ensemble des diviseurs positifs de k. Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} D_n \times D_{n'} & \longrightarrow & D_{nn'} \\ (d, d') & \longmapsto & dd' \end{array}$$

est bijective.

b . En déduire que si n et n' sont des entiers naturels premiers entre eux, $\sigma(nn') = \sigma(n)\sigma(n')$.

4) a. Soit $p \geqslant 1$. Montrer que p est premier si, et seulement si $\sigma(p) = p + 1$.

b. Calculer pour $(q, r) \in \mathbb{N}^2$, $q, r \geqslant 2$, la somme $1 + q + q^2 + \ldots + q^r$.

c. Déterminer pour p premier et $r \geqslant 2$, $\sigma(p^r)$.

d. Exprimer $\sigma(n)$ où $n = p_1^{r_1} \ldots p_s^{r_s}$ avec $p_1 < \ldots < p_s$ premiers et chaque $r_i \geqslant 1$.

5) Montrer que si $M_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ est premier, $2^n(2^{n+1} - 1)$ est parfait.

6) En utilisant la question **3)**, prouver que si a est parfait et pair, il existe $n \geqslant 1$ tel que $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ où $M_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ est premier.

7) Montrer qu'un nombre $n \geqslant 3$ parfait et impair, alors n admet au moins trois facteurs premiers distincts.

A l'heure actuelle, on ne sait toujours pas s'il existe des nombres parfaits impairs.

Problème 2 : sous-anneau dense de $\mathbb{R}$

1) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha^n$.

2) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$;

(ii) $A \cap]0, 1[\neq \emptyset$.

Problème 3 : orthocentre

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ des nombres complexes deux à deux distincts. On suppose que $\dfrac{d-a}{b-c}$ et $\dfrac{d-b}{c-a}$ sont imaginaires purs.

1) Démontrer que $\dfrac{d-c}{a-b}$ est aussi imaginaire pur.
2) Donner une interprétation géométrique de la question précédente.

Problème 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, b_2, \ldots b_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda b_i)^2$$

1) Montrer que "$P(\lambda) = 0$" est une équation du second degré en λ.
2) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

3) À quelle condition nécessaire et suffisante y a t-il égalité dans l'inégalité de la questionn précédente.

II. Soit $0 < q < 1$ un réel et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'inégalité

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} q^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$$

III. Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^*$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose $a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_2 \leqslant a_1$ et que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} b_i$$

1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2) En déduire

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$