HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}2

Vendredi 15 octobre 2004

- Durée : 4 heures -

Les trois exercice et les trois problèmes sont totalement indépendants. L'épreuve se déroule en deux phases. Au bout d'une heure est relevé un premier ensemble de copie correspondant aux deux premiers exercices. Le deuxième ensemble de copie correspond à l'exercice 3 et aux trois problèmes, il est relevé au bout de quatre heures. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé.

Il n'est pas interdit d'admettre certains éléments de démonstration (voire des questions entières) afin de ne pas rester bloqué. Mais ils doivent absolument être mentionnés.

On laissera une marge à gauche.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé, on mettra seulement en évidence les numéros des questions traitées. Il est recommandé par contre d'annoncer ce qui va être démontré et éventuellement par quel type de raisonnement (récurrence, absurde, contraposée...). Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie. La présentation et la rédaction pourront représenter jusqu'à 15% *de la note obtenue.*

Exercice 1 :

Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement. On suppose que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$.

1) Montrer que G est abélien.

2) Soient H un sous-groupe de G et $a \in G \backslash H$.

a. Montrer que $H \cap aH = \emptyset$, et que $H \cup (aH)$ est un sous-groupe de G.

b. Si H est fini, quelle relation existe t-il entre le cardinal de H et le cardinal de $H \cup aH$?

3) On suppose G fini. Montrer que le cardinal de G est puissance de 2.

4) Exhiber un tel groupe de cardinal 2, puis 4 et finalement 2^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 :

On considère le groupe $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni de l'addition définie par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{pour tout } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Démontrer que G n'est pas monogène.

Exercice 3 :

1) Calculer la somme $S = \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2 \\ k+l\leqslant 10}} kl$. Dire comment vérifier le résultat avec la calculatrice.

2) Avec la convention, $\sum_{k\in\emptyset} k = 0$, démontrer que

$$\sum_{A\subset[\![\,1,n]\!]} \sum_{k\in A} k = n(n+1)2^{n-2}.$$

Problème 1 : Inversion binômiale

On admet dans cet exercice que si deux fonctions polynômiales sont égales, alors on peut identifier leurs coefficients, autrement dit, étant données deux familles de $\mathbb{Q}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support fini pour $+$, le fait que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n,$$

pour tout $x \in \mathbb{Q}$, entraine que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Soit $x \in \mathbb{Q}$. En factorisant l'expression $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-1)^k$, puis en la développant, démontrer que

$$\sum_{k=l}^{n} (-1)^{k-l} C_n^k C_k^l = \begin{cases} 0 \text{ si } l < n \\ 1 \text{ si } l = n \end{cases}$$

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{Q}$. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k v_k$.

Problème 2 : Damiers. Trous de Kaplanski

On considère pour tout couple d'entiers naturels non nuls, un damier rectangulaire ayant n cases dans un sens et p dans l'autre. Deux cases de ce damier seront dites voisines si elles se touchent par l'un de leurs cotés. On note alors $S(n,p)$ le nombre de choix de deux cases (au sens d'une partie à 2 éléments) non voisines de ce damier.

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.

1) Déterminer la valeur de $S(n,1)$.

2) Déterminer la valeur de $S(n,2)$.

3) On note $u(n,p)$ le nombre de choix de deux cases voisines sur un damier de longueur n et hauteur p.

a . Trouver $a_n \in \mathbb{N}$ indépendant de p vérifiant pour tout $p \geqslant 1$,

$$u(n,p+1) = u(n,p) + a_n.$$

b . En déduire pour tout couple (n,p) de $\mathbb{N}^*$ la valeur de $u(n,p)$.

c . Déterminer pour tout couple (n,p) de $\mathbb{N}^*$ la valeur de $S(n,p)$.

4) On note $T(n,q)$ pour tout couple (n,q) de $\mathbb{N}^*$, le nombre de choix de q cases (au sens d'une partie à q éléments) deux à deux non voisines d'un damier de longueur n et hauteur 1 (damier qui n'a donc qu'une seule ligne de n cases).

a. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $T(n,3)$

b. Soit $q, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ et $q \geqslant 2$. Établir la relation

$$T(n,q) = T(n-1,q) + T(n-2,q-1)$$

c. Démontrer que pour $q, n \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}^*$, $T(n,q) = C^q_{n-q+1}$.

d. On désire retrouver ce résultat par un argument combinatoire : on considère un choix de q cases deux à deux non voisines d'un damier $n \times 1$. On supprime les cases du damier qui suivent les $q-1$ premiers éléments de ce choix. Par ce procédé, justifier le résultat $T(n,q) = C^q_{n-q+1}$.

Problème 3 : Groupes ordonnés

Un groupe multiplicatif G est dit *ordonné* lorsque G est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ compatible avec la loi du groupe, c'est-à-dire telle que pour tout $(a,b,x) \in G^3$:

$$a \leqslant b \Longrightarrow ax \leqslant bx \text{ et } xa \leqslant xb$$

Si $A \subset G$, $A^- = \{x \in G, x^{-1} \in A\}$.

1) Soit G un groupe ordonné. Montrer que si $a \leqslant b$ et $x \leqslant y$ dans G :

$$ax \leqslant by \quad \text{et} \quad b^{-1} \leqslant a^{-1}$$

2) Soient G un groupe ordonné et :

$$P = \{x \in G,\ 1 \leqslant x\}$$

Montrer que la partie P vérifie les conditions (C) :

$$PP \subset P, \ \ P^- \cap P = \{1\} \text{ et pour tout } x \in G,\ xPx^{-1} \subset P$$

3) Soit G un groupe et $P \subset G$ vérifiant les conditions (C) données en **2)**. On définit la relation binaire $\leqslant$ définie par :

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow ba^{-1} \in P$$

pour tout $(a,b) \in G^2$.

a. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre.

b. Montrer que $\leqslant$ est compatible avec la loi du groupe.

c. Montrer que $P = \{x \in G, 1 \leqslant x\}$.

d. Montrer que l'ordre est total si $P \cup P^- = G$.

Dans la suite du problème, $(G, \leqslant)$ désigne un groupe ordonné.

4) Soient $a \in G$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de G possédant une borne supérieure. Montrer que $\sup_{i \in I} ax_i = a \sup_{i \in I} x_i$ et $\inf_{i \in I} x_i^{-1} = (\sup_{i \in I} x_i)^{-1}$.

5) On suppose que toute famille non vide et majorée de G admet une borne supérieure. Soit $a \in G$, $1 < a$. Montrer que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée dans G.