



Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ N°11

Mercredi 8 juin 2005

- Durée : 4 heures -

Les deux problèmes sont totalement indépendants.

Il est demandé de porter un grand soin à la rédaction. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Problème 1 :

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note $D : y \in E \mapsto y' \in E$, l'opérateur de dérivation sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E .

1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Préciser $\ker(D - \lambda I_E)$. Quelle est sa dimension ?

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \geq 1$ et $y \in E$.

a. Démontrer que $y \in \ker(D - \lambda I_E)^p$ si, et seulement si, y s'écrit $x \mapsto e^{\lambda x} P(x)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P \leq p - 1$ (on posera $z(x) = e^{-\lambda x} y(x)$).

b. Quelle est la dimension de $\ker(D - \lambda I_E)^p$?

3) On considère l'équation différentielle linéaire scalaire

$$(\mathcal{E}) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0.$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On note S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et on appelle polynôme caractéristique associée à $(\mathcal{E})$ le polynôme

$$Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

a. Exprimer S en fonction de Q et D .

On suppose que $Q = (X - \lambda_1)^{p_1} \cdots (X - \lambda_r)^{p_r}$ avec les λ_i deux à deux distincts et les $p_i \in \mathbb{N}^*$.

b. En déduire que $y \in S$ si, et seulement si, il existe $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\deg P_i < p_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{\lambda_1 x} P_1(x) + \cdots + e^{\lambda_r x} P_r(x).$$

c. Justifier pour $y \in E$ l'unicité de $P_1, \dots, P_r$ introduits à la question précédente.

d. Quelle est la dimension de S ?

4) Soit F un sous-espace de E de dimension finie n stable par dérivation (si $f \in F$, $f' \in F$). Démontrer qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$ tels que F soit l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0.$$

5) Décrire tous les sous-espaces de E , de dimension finie, stable par dérivation.

Problème 2 :

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul, $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite finie de $n+1$ nombres réels ; l'objet du problème est de déterminer, pour tout entier naturel k , les polynômes de degré inférieur ou égal à k , tels que le réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation suivante :

$$\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(i))^2 \text{ soit minimal.}$$

$$\text{Pour } 0 \leq i, j \leq n, \text{ on note } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

I. Première partie : l'application Φ_k

Pour tout entier naturel k , on considère :

$$\Phi_k : p \in \mathbb{R}_k[X] \longmapsto \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Il est admis que cette application est linéaire.

1) Déterminer le noyau de l'application Φ_k ; préciser sa dimension et établir l'expression des polynômes du noyau lorsque celui-ci n'est pas réduit à $\{0\}$.

2) Étudier le rang de Φ_k . Pour quelles valeurs de l'entier k est-elle surjective ? Pour quelle valeur de l'entier k est-elle un isomorphisme ?

II. Deuxième partie : étude préliminaire

1) Montrer à l'aide des questions précédentes l'existence et l'unicité d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que pour tout i dans $\{0, 1, \dots, n\}$ on ait $Y(i) = y_i$

Cette notation du polynôme Y associé à la suite $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ est conservée dans la suite.

2) On considère $(l_0, \dots, l_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, $l_p = (\delta_{ip})_{0 \leq i \leq n}$. Démontrer l'existence et l'unicité d'une base $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $L_i(j) = \delta_{ij}$ pour tout $0 \leq i, j \leq n$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\mathcal{L}$? du polynôme Y dans la base $\mathcal{L}$?

3) Soit k un entier supérieur ou égal à n ; déterminer la valeur du minimum m_k du réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation

$$\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(i))^2$$

où P est un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$. Quels sont les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lesquels l'expression $\Delta_k(P)$ est nulle ?

Dans toute la suite du problème, l'entier k est supposé inférieur ou égal à n .

III. Troisième partie : interprétation de m_k pour $k \leq n$

1) Prouver l'existence et l'unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$ tel que la base $\mathcal{L}$ définie dans la partie précédente soit orthonormale. Préciser pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ la valeur de $(P|Q)$.

On rappelle que $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Calculer $(1|1)$, $(1|X)$ et $(1|X^2)$.

Dans tout ce qui suit $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire et on définit la norme d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\|P\| = \sqrt{(P|P)}$$

3) Étant donnée une suite $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$, soit Y le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ associé à cette suite (cf. **II.1**). Déduire des conventions précédentes que

$$\Delta_k(P) = \|Y - P\|^2$$

Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_k de $\mathbb{R}_k[X]$ pour lequel le réel $\Delta_k(P)$ est égal à son minimum m_k :

$$m_k = \|Y - P_k\|^2$$

Définir le polynôme P_k au moyen de Y et de $\mathbb{R}_k[X]$.

Que dire du polynôme $Y - P_k$ et du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$? Faire un croquis.

4) a. On suppose seulement dans cette question que $k = 0$. Déterminer, pour un polynôme Y associé à $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$, les expressions de P_0 et m_0 . Comparer $\|Y\|^2 - \|P_0\|^2$ et m_0 .

b. On suppose seulement dans cette question que $k = 1$. L'entier n est supposé impair, $n = 2q - 1$, et $y_i = 1$ si $0 \leq i \leq q - 1$, $y_i = -1$ si $q \leq i \leq 2q - 1$. Déterminer P_1 .

IV. Quatrième partie : détermination de m_k à l'aide d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$

Le but de cette question est de construire une suite unique de polynômes $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ tels que :

1. $B_0 = 1$;

2. pour tout entier naturel $k \leq n$, la suite $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ soit une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ telle que les polynômes B_i , pour $0 \leq i \leq k$, soient deux à deux orthogonaux ;

3. pour tout $k \geq 1$, le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme B_k soit égal à C_{2k}^k .

1) Déterminer B_1 et B_2 .

2) Déterminer le polynôme B_k pour $1 \leq k \leq n$ à l'aide des polynômes X^k et Q_k , projection du monôme X^k sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Faire un croquis.

En déduire l'existence et l'unicité d'une base $\mathcal{B} = (B_0, B_1, \dots, B_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant les propriétés 1, 2 et 3.

3) Démontrer, lorsque l'entier k est compris entre 1 et n , que le polynôme $B_k(n - X)$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. En déduire une relation simple entre $B_k(n - X)$ et B_k .

4) Déterminer les coordonnées du polynôme P_k (défini en **III.3**) dans la base $\mathcal{B}$, k étant inférieur ou égal à n . Que vaut P_n ? En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n les relations :

$$P_k = P_{k-1} + \frac{(B_k|Y)}{\|B_k\|^2} B_k \quad \text{et} \quad m_k = m_{k-1} - \frac{(B_k|Y)^2}{\|B_k\|^2}.$$

V. Cinquième partie : étude de la famille $(B_0, B_1, \dots, B_n)$

1) Soit k un entier compris entre 2 et n et j un entier compris entre 0 et $k-2$; démontrer l'orthogonalité des polynômes XB_k et B_j .

2) En déduire, pour tout k entier compris entre 1 et $n-1$ l'existence de réels α_k , β_k et γ_k tels que :

$$XB_k = \alpha_k B_{k-1} + \beta_k B_k + \gamma_k B_{k+1}.$$

3) Déterminer à l'aide de la question **IV.3)** la valeur du réel β_k .

4) Que vaut γ_k ? En déduire la valeur du produit scalaire $(XB_k|B_{k+1})$ en fonction de l'entier k et du réel $\|B_{k+1}\|^2$.

5) Déterminer le réel α_k en fonction de l'entier k et des réels $\|B_{k-1}\|^2$ et $\|B_k\|^2$. En déduire

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} \left(B_1 B_k - \frac{k}{2k-1} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1} \right).$$