Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}1

Vendredi 24 septembre 2004

- Durée : 3 heures -

Les cinq exercices sont totalement indépendants. On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée. Les récurrences ne sauraient être commencées sans une formulation claire de l'hypothèse de récurrence.

Il n'est pas interdit d'admettre certains éléments de démonstration (voire des questions entières) afin de ne pas rester bloqué. Mais ils doivent absolument être mentionnés.

On laissera une marge à gauche.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé, on mettra seulement en évidence les numéros des questions traitées. Il est recommandé par contre d'annoncer ce qui va être démontré et éventuellement par quel type de raisonnement (récurrence, absurde, contraposée...). Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie. La présentation et la rédaction pourront représenter jusqu'à 15% de la note obtenue.

Exercice 1 :

Soit E un ensemble, A, B deux parties fixées de E. On définit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array}.$$

1) On suppose Φ injective. Que peut-on dire de $A\cup B$?

2) On suppose que $E = A\cup B$. Montrer que Φ est injective.

3) On suppose Φ surjective. Démontrer que $A\cap B = \emptyset$.

4) On suppose que $A\cap B=\emptyset$. Montrer que Φ est surjective.

5) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur A et B, l'application Φ est-elle bijective ? Exprimer Φ^{-1}.

Exercice 2 :

Soit E, F et G trois ensembles. On suppose que G possède deux éléments distincts. On considère une application $f : E \longrightarrow F$ et

$$f_* : \varphi\in\mathcal{F}(G,E)\longmapsto f\circ\varphi\in\mathcal{F}(G,F) \ \ et \ \ f^* : \varphi\in\mathcal{F}(F,G)\longmapsto \varphi\circ f\in\mathcal{F}(E,G).$$

Montrer l'équivalence

$$f \text{ surjective} \iff f_* \text{ surjective},$$

puis l'équivalence

$$f \text{ surjective} \iff f^* \text{ injective}.$$

Exercice 3 :

On désire montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$f(f(n)) = n + 2005.$$

On suppose qu'une telle fonction existe et on pose $E = [\![0, 2004]\!]$, $F = \mathbb{N} \backslash E$, $G = f(\mathbb{N}) \cap E$ et $H = E \backslash G$.

1) Montrer que f est injective.
2) Montrer que $f(F) \subset F$.
3) Montrer que $f^{<-1>}(F) = F \cup G$.
4) Montrer que $f^{<-1>}(G) = H$.
5) Comparer Card$G$ et Card$H$ et aboutir à une contradiction.

Exercice 4 : comparaison à l'infini des fonctions

On définit sur $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ la relation $\sim$ de la manière suivante : si f et g sont dans E alors

$$f \sim g \iff (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geqslant n_0)\ (f(n) = g(n))$$

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Pour ω et ω' deux classes d'équivalences de $E/\sim$. On dira que $\omega \leqslant \omega'$ s'il existe $f \in \omega$ et $f' \in \omega'$ tels que $f \leqslant f'$.

2) Soit $f, f' \in E$. On note ω (resp. ω') la classe de f (resp. f'). Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

(i) $\omega \leqslant \omega'$;
(ii) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n) \leqslant f'(n)$.

3) Montrer que $(E/\sim, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.
4) L'ordre est-il total ? On justifera la réponse.

Exercice 5 : numération anglaise

1) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ croissante et majorée est stationnaire i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Soit $(R_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers avec $R_k \geqslant 2$ pour tout $k \geqslant 1$, N un entier naturel non nul.

2) Démontrer qu'il existe un unique $d \in \mathbb{N}$ tel que $R_1 \cdots R_d \leqslant N < R_1 \cdots R_d R_{d+1}$ (par convention, si $d = 0$, $R_1 \cdots R_d = 1$).

3) Démontrer par récurrence sur N qu'il existe $d \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tels que

$$N = a_d R_1 R_2 \cdots R_d + \cdots + a_2 R_1 R_2 + a_1 R_1 + a_0,$$

$a_d \neq 0$ et pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $0 \leqslant a_k \leqslant R_{k+1}$. On veillera à bien exprimer l'hypothèse de récurrence.

4) Montrer que l'écriture de la question précédente est unique.
5) Que vaut N quand $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_k = R_{k+1} - 1$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$?
6) En déduire $1 + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n!$.