HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}1

Lundi 22 septembre 2003

Il n'est demandé de rédiger la partie **I.** *du premier problème.*

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée et on hésitera pas à faire référence aux propriétés utilisées.

Il n'est pas interdit d'admettre certains éléments de démonstration (voire des questions entières) afin de ne pas rester bloqué. Mais ils doivent absolument être mentionnés.

On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 : Le théorème de Cantor-Bernstein

I. Soient X un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de X, $\varphi : X \longrightarrow Y$.

1) Montrer que

$$\varphi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \varphi(A_i)$$

2) A t-on $\varphi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i)$? A qu'elle condition sur φ, l'égalité est-elle vraie? Montrer qu'une des deux inclusions est toujours vérifiée.

II. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux injections. On désire prouver que E et F sont équipotents i.e. qu'il existe une bijection $h : E \longrightarrow F$ (Théorème de Cantor-Bernstein).

Pour ce faire, on considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties C de E telles que

$$g\left(F\backslash f(C)\right) \subset E\backslash C$$

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide et que $K = \displaystyle\bigcup_{C\in\mathcal{F}} C$ est dans $\mathcal{F}$.

On pose $H = E\backslash g(F\backslash f(K))$.

2) Montrer que $K \subset H$.

3) Soit $y \in F\backslash f(H)$. Montrer que $g(y) \notin H$. En déduire que $H \in \mathcal{F}$ et puis que $H = K$.

4) Montrer que l'application $h : E \longrightarrow F$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in K \\ g^{-1}(x) \text{ si } x \in E\backslash K \ \ \text{(où } g^{-1}(x) \text{ désigne abusivement l'unique antécédant de } x \text{ par } g) \end{cases}$$

est bien définie et que c'est une bijection de E sur F.

Problème 2 :

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante avec $f(2) = 2$. On suppose que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $f(pq) = f(p)f(q)$.

Démontrer que f est l'identité.