HX3 **Mathématiques**

Devoir surveillé N^{o}4

Samedi 6 décembre 2003

\- Durée : 3 heures -

L'exercice et le problème sont totalement indépendants.

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée. Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé.

Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Problème : autour du théorème de Césaro

Les parties **III.** à **VI.** sont indépendantes.

I. Première partie : le théorème classique de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1) Démontrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, il en va de même de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

2) On suppose $(u_n)_{n\geqslant 1}$ convergente vers $l \in \mathbb{K}$. Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi convergente vers l.

3) Réciproquement, on suppose $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergente vers l. A t-on convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vers l ?

4) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite réelle tendant vers $+\infty$. Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ diverge aussi vers $+\infty$.

5) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite réelle monotone. Montrer que si $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers un réel l, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a également l pour limite.

6) On considère $\sum \frac{1}{n}$ la série harmonique.

a. Redémontrer la divergence de cette série.

b. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que pour n tend vers l'infini, $H_n = o(n)$.

II. Deuxième partie : le lemme de l'escalier

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On suppose que $u_n - u_{n-1}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque n tend vers l'infini. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l.$$

En déduire que si $l \in \mathbb{R}^*$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln$.

2) Soit $u_0 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

c. Démontrer que pour n tendant vers $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

3) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2$ pour $n \geqslant 0$.

a. Montrer qu'il existe $N \geqslant 0$ tel que si $n \geqslant N$, $a_n > 0$.

b. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{S_{n-1}} = 1$.

d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^3 - S_{n-1}^3 = 3$.

e. Montrer que pour n tendant vers $+\infty$, $S_n \sim \sqrt[3]{3n}$, et en déduire un équivalent de a_n.

III. Troisième partie : suites convexes bornées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On note pour $n \geqslant 0$, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ et $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 a_n \geqslant 0$.

1) À l'aide du **II.1)**, montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2) Montrer que $n\Delta a_n$ converge vers 0 en utilisant le théorème de Césaro.

3) Montrer que la série $\sum(n+1)\Delta^2 a_n$ converge.

IV. Quatrième partie : étude d'un exemple

Soit θ un réel. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \cos n\theta$ et $v_n = \sin n\theta$.

1) Démontrer que $u_n + iv_n$ converge si, et seulement si, $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2) En déduire que u_n diverge si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. De même, montrer que v_n diverge si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

On pose pour $n \geqslant 1$, $C_n = u_1 + \cdots + u_n$ et $S_n = v_1 + \cdots + v_n$.

3) Calculer C_n et S_n en fonction de n et θ.

4) En déduire que pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$|C_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \quad \text{et} \quad |S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}.$$

5) En déduire les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta}{n}.$$

6) Comparer pour x réel, $|\sin x|$ et $\sin^2 x$. En déduire que si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, la suite

$$\frac{|\sin\theta| + |\sin 2\theta| + \cdots + |\sin n\theta|}{n} \quad \text{ne converge pas vers 0.}$$

Préciser la limite lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

7) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k\theta}{k} = \frac{C_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

8) Démontrer que si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum C_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge.

9) En déduire que si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum \frac{\cos n\theta}{n}$ converge. Qu'en est-il si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$?

10) Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

V. Cinquième partie :

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Trouver pour n tendant vers $+\infty$ un équivalent de C_n^k. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{C_n^k}{2^n}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k.$$

2) On suppose que $l = 0$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

VI. Sixième partie : caractérisation de la convergence au sens de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive et majorée. On pose $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. On appelle partie de densité nulle de $\mathbb{N}^*$ toute partie $A \subset \mathbb{N}^*$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}(A \cap [\![1, n]\!])}{n} = 0.$$

1) Montrer que la réunion de deux parties de $\mathbb{N}^*$ de densité nulle est encore densité nulle.

2) Montrer que le complémentaire d'une partie de densité nulle est infini.

3) On suppose qu'il existe $A \subset \mathbb{N}^*$ de densité nulle telle que $\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin A}} u_n = 0$. Démontrer qu'alors v_n converge vers 0.

4) Réciproquement, on suppose que v_n converge vers 0. On note $V_n = \sup_{p\geqslant n} v_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0.

On pose $A = \{p \in \mathbb{N}^*, u_p \geqslant \sqrt{V_p}\}$.

b. Démontrer que A est de densité nulle.

c. Démontrer que $\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin A}} u_n = 0$.

Exercice :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1) On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence.

2) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence l. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3) Le résultat de la question précédente est-il encore valable si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est plus supposée bornée ?