HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}10

Mercredi 20 mai 2004

- Durée : 3 heures 30 minutes -

Il sera tenu grand compte de la rédaction et de la qualité de la présentation.

Fonction Gamma et formule de Stirling

I. Première partie :

1) Démontrer que $f : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-t^2}$ est intégrable.

Pour tout $R > 0$, on note

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2}\mathrm{d}t, \quad J_R = \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad K_R = \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où C_R est le carré $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x, y \leqslant R\}$ et Q_R le quart de disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, 0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

2) a. Quelle relation y a t-il entre J_R et I_R ?

b. Montrer que $K_R \leqslant J_R \leqslant K_{R\sqrt{2}}$.

c. Calculer explicitement K_R et déduire de ce qui précède

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3) On désigne par s un nombre réel strictement positif. Montrer que $g : u \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-u}u^{s-1}$ est intégrable.

On note $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{s-1}\mathrm{d}u$.

4) a. Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

b. Établir une relation de récurrence entre $\Gamma(s+1)$ et $\Gamma(s)$.

c. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)$ et $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$.

5) a. Démontrer que si $s > 0$,

$$\Gamma(s) \geqslant \int_0^1 (1-u)u^{s-1}\mathrm{d}u.$$

Que vaut $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \Gamma(s)$?

b. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $s \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{s-1}\mathrm{d}u \leqslant M$.

c. Étudier $\lim\limits_{s \to +\infty} \Gamma(s)$.

II. Deuxième partie :

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E_\alpha) \quad 2xy' - (\alpha - 2 - x)y = 0.$$

a. Résoudre (E_α) sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

b. On suppose α entier de $\mathbb{Z}$, déterminer les valeurs de α pour lesquelles (E_α) possède des solutions non identiquement nulles définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Préciser ces solutions.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

a. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

b. Montrer que pour $n \geqslant 3$, l'équation $f_n'(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, notée r_n que l'on calculera.

3) Étudier les variations de f_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ et tracer sommairement les courbes représentatives correspondantes (on ne demande pas le tracé de ces courbes sur un même graphique, ni l'étude de leur concavité).

4) On se propose maintenant d'étudier la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ des fonctions f_n et f_{n+1}. On se limitera au cas $n \geqslant 4$.

a. Démontrer que l'équation $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ possède une unique solution $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ que l'on calculera en fonction de $\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right) / \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

b. Calculer les limites du rapport $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ lorsque x tend vers 0^+ et lorsque x tend vers $+\infty$.

5) En admettant que $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} > 1$ (ce résultat sera prouvé en **IV. 2)**), comparer α_n et r_{n+1}. Tracer alors $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ sur un même graphique.

III. Troisième partie :

1) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer I_1 et I_2.

b. Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n, puis calculer I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.

c. Montrer que I_n est strictement décroissante et que pour $n \geqslant 2$,

$$\left[\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 (2n).$$

d. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \left[\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 (2n).$$

Montrer que $0 < u_n - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{u_n}{2n+1}$.

e. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2} = \pi \quad \text{(formule de Wallis).}$$

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \ln(n!) - n\ln\frac{n}{e} - \frac{1}{2}\ln n.$$

a . Démontrer l'existence d'une constante réelle λ que l'on calculera telle que pour n tendant vers l'infini

$$S_n - S_{n-1} = \frac{\lambda}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pose $V_1 = S_1$ et $V_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.

b. Montrer que la série $\sum V_n$ converge.

3) On pose $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$.

a. Exprimer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$ en fonction de S.

b. Calculer e^S à l'aide de la formule de Wallis (voir **1)e.**). Conclure que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad \text{(formule de Stirling).}$$

IV. Quatrième partie :

On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude de la suite $(M_n)_{n\geqslant 3}$ définie par $M_n = f_n(r_n)$ (voir **II.2)b.**).

1) a. Montrer que si β et u sont strictement positifs, on a

$$(1+\beta u)^{1/\beta} < e^u.$$

b. Déterminer $\displaystyle\sup_{n\geqslant 3} A_n$ où $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$.

c. On considère la suite $(B_n)_{n\geqslant 3}$ définie par

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}.$$

Expliciter B_{2p} et B_{2p+1} en fonction de u_p et montrer que $B_n > 1$ (on pourra utiliser **III.1)d.**).

2) Calculer $\dfrac{M_{n+1}}{M_n}$ en fonction de A_n et B_n et conclure que la suite (M_n) converge.

3) Déterminer un équivalent de M_n en $+\infty$ et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n$.

4) Montrer que l'on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2M_{2n+1}}\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{e}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

et déterminer, si $x \in \mathbb{N}$ ou si $x - \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}$, un équivalent de $\Gamma(x+1)$ au voisinage de $+\infty$.