HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}9

À remettre le mercredi 14 mai 2003

Problème 1 :

1) Montrer que pour tout $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \mathrm{d}t \quad \text{existe et vaut } \frac{1}{1+x^2}$$

2) Montrer que, pour tout $t > 0$, $|\sin t| \leqslant t$. En déduire que pour tout $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad \text{existe, et } \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{x}$$

3) Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

a. Soient $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a :

$$\left| e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \right| \leqslant \frac{h^2 t^2}{2} e^{-\frac{xt}{2}}$$

En déduire que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{1}{1+x^2} \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^2}$$

b. Conclure que f est dérivable et que, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

4) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$, décroissante, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$ et $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = l \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(t) \cos t \mathrm{d}t \quad \text{existe, et que } \left| \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \cos t \mathrm{d}t \right| \leqslant l$$

b. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin t \mathrm{d}t \quad \text{existe, et que } \left| \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin t \mathrm{d}t \right| \leqslant 2l$$

5) a. Soit $x > 0$. Pour tout $t > 0$, on note

$$h(t) = \frac{1 - e^{-xt}}{t}$$

Montrer que h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin t \mathrm{d}t \quad \text{existe, et que} \quad \left| \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin t \mathrm{d}t \right| \leqslant 2x$$

c. Conclure que

$$\int_0^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad \text{existe et vaut } \frac{\pi}{2}$$

Problème 2 :

1) Soient $u, v : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues. On suppose qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$(\forall x \in [a, +\infty[) \left(u(x) \leqslant C + \int_a^x u(t)v(t)\mathrm{d}t \right)$$

Montrer alors que pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$u(x) \leqslant C \exp\left(\int_a^x v(t)\mathrm{d}t \right)$$

2) Soit (E) l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$ où $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose $q > 0$ et $q' > 0$.

a. Soit $x \geqslant 0$. Exprimer la différence $y'^2(x) - y'^2(0)$ à l'aide d'une intégrale définie à l'aide de y, y' et q.

b. En déduire l'existence de $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$q(x)y^2 \leqslant C + \int_0^x q'y^2.$$

c. Montrer que toute solution y sur $\mathbb{R}_+$ est bornée.

3) Soit (E) l'équation différentielle $y'' + (1 + q(x))y = 0$ où $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose q' intégrable et $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = 0$.

a. Démontrer l'existence de $a > 0$ et de $C > 0$ tel que pour tout $x \geqslant a$

$$y^2(x) \leqslant C + 2\int_a^x |q'|y^2.$$

b. En déduire que y est bornée.

c. Démontrer que y'', puis y' sont également bornées.

4) Une généralisation du lemme de Gromwall. Soit $f, g, h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications continues. On suppose $g \geqslant 0$ et :

$$\forall t \in [a, b], \;\; 0 \leqslant f(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(u)f(u)\mathrm{d}u.$$

Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \;\; 0 \leqslant f(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(u)h(u)e^{\int_u^t g}\mathrm{d}u.$$