HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}8

À remettre le mardi 22 avril 2003

Développement asymptotique des sommes de Riemann.

Soient $a < b$ deux réels. On note C l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[a, b]$. Pour tout $f \in C$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

et

$$\Delta_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f)$$

Le but du problème est d'établir un développement asymptotique de $\Delta_n(f)$ lorsque n tend l'infini.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $(c_k)_{0\leqslant k\leqslant q}$ et $(c'_k)_{0\leqslant k\leqslant q}$ familles de $\mathbb{R}$ telles que :

$$u_n = c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_q}{n^q} + o\left(\frac{1}{n^q}\right) = c'_0 + \frac{c'_1}{n} + \ldots + \frac{c'_q}{n^q} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

Dans ces conditions, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $c_k = c'_k$.

I. Première partie : Convergence des sommes de Riemann

1) Soit $f \in C$. Redémontrer que $\Delta_n(f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

2) Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{ch}\ (k/n) + 1}$.

3) En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{n^2 - kn + k^2}} = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$$

(on pourra se servir de la relation $\mathrm{Argsh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln 3$)

II. Deuxième partie : Existence du développement asymptotique

On suppose que $a = 0$ et $b = 1$. Soit $q \geqslant 0$ un entier. Soit $f \in C$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $x_k = k/n$. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, établir que :

$$\begin{aligned}\Delta_n(f) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p f^{(p)}(x_k)}{(p+1)!n^{p+1}} + W_n \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{f'(x_k)}{2!n^2} + \frac{f''(x_k)}{3!n^3} - \ldots + (-1)^q \frac{f^{(q)}(x_k)}{(q+1)!n^{q+1}}\right) + W_n\end{aligned}$$

avec $|W_n| \leqslant \dfrac{\sup_{x\in[0,1]} |f^{(q+1)}|}{(q+2)!n^{q+1}}$.

2) En déduire que :

$$\Delta_n(f) = \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p S_n(f^{(p)})}{(p+1)!n^p} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

3) On suppose qu'il existe c_1, $c_2, \ldots$, c_{q-1} dans $\mathbb{R}$ tels que pour toute fonction $g \in C$ et tout $q' \leqslant q-1$:

$$\Delta_n(g) = \sum_{p=1}^{q'} c_p \frac{g^{(p-1)}(1) - g^{(p-1)}(0)}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^{q'}}\right)$$

a. Montrer que si l'on pose $c_0 = -1$, on obtient pour tout $1 \leqslant p \leqslant q$:

$$S_n\left(f^{(p)}\right) = -\sum_{r=0}^{q-p} c_r \frac{f^{(p+r-1)}(1) - f^{(p+r-1)}(0)}{n^r} + o\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$$

b. En déduire :

$$\Delta_n(f) = \sum_{l=1}^{q}\left[\left(\sum_{r=0}^{l-1} \frac{(-1)^{l-r+1}}{(l-r+1)!} c_r\right) \frac{f^{(l-1)}(1) - f^{(l-1)}(0)}{n^l}\right] + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

On considère dans la suite du problème, la suite $(c_p)_{p\geqslant 0}$ définie par récurrence par :

$$c_0 = -1 \quad \text{et} \quad c_q = \sum_{r=0}^{q-1} \frac{(-1)^{q-r+1}}{(q-r+1)!} c_r = \sum_{s=2}^{q+1} \frac{(-1)^s}{s!} c_{q-s+1} \ \ (q \geqslant 1)$$

4) Démontrer par récurrence que pour toute $f \in C$ et tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_n(f) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

5) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à q. Montrer rapidement que la formule du **4)** est exacte, i.e. :

$$\Delta_n(P) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{P^{(p-1)}(1) - P^{(p-1)}(0)}{n^p}$$

(on constatera notamment que la formule du **1)** est exacte, i.e. $W_n = 0$)

6) On revient au cas général avec $a < b$ quelconques. A l'aide d'un changement de variable affine, prouver que pour tout $f \in C$ et tout $q \geqslant 0$:

$$\Delta_n(f) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{\left(f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)\right)(b-a)^p}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

et si $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à q :

$$\Delta_n(P) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{\left(P^{(p-1)}(b) - P^{(p-1)}(a)\right)(b-a)^p}{n^p}$$

III. Troisième partie : Nombres de Bernoulli

Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_n(u) = \int_0^1 t^n e^{tu} \mathrm{d}t$$

1) a. Montrer que pour tout $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $(u, u_0) \in]-A, A[$ et tout $t \in [0,1]$, on ait :

$$\left|e^{ut} - e^{u_0 t} - (u - u_0)te^{u_0 t}\right| \leqslant M(u-u_0)^2$$

b. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ecrire sous forme intégrale la différence :

$$\frac{F_n(u) - F_n(u_0)}{u - u_0} - F_{n+1}(u_0) \text{ pour } u \neq u_0$$

et étudier sa limite lorsque u tend vers u_0, $u \neq u_0$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Conclure que F_n est dérivable et que $F_n' = F_{n+1}$.

On considère la fonction :

$$\varphi : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } u = 0 \\ \dfrac{e^u - 1}{u} \text{ si } u \neq 0 \end{cases}$$

2) a. A l'aide du **1)**, montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que $\psi = 1/\varphi$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. Soit $q \in \mathbb{N}$. Justifier le développement limité lorsque $u \neq 0$ tend vers 0 :

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{p=0}^{q} \frac{\psi^{(p)}(0)}{p!} u^p + o(u^q)$$

c. Calculer $\psi'(0)$.

d. Montrer que pour $u \neq 0$:

$$\frac{u}{e^u - 1} + \frac{u}{2} = \frac{u}{2} \coth \frac{u}{2}$$

En déduire que pour $p \geqslant 3$, p impair, $\psi^{(p)}(0) = 0$.

On notera dans la suite du problème, B_p le p-ième nombre de Bernoulli défini pour $p \geqslant 0$ par :

$$B_p = (-1)^{p+1}\psi^{(2p)}(0)$$

On a donc pour $u \neq 0$, u tendant vers 0 :

$$\frac{u}{e^u - 1} = -\frac{u}{2} + \sum_{p=0}^{q} \frac{(-1)^{p+1}B_p}{(2p)!}u^{2p} + o(u^{2q+1}) = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^{p+1}B_p}{(2p)!}u^{2p} + o(u^{2q+1})$$

IV. Quatrième partie : Utilisation d'une fonction test

On considère $f : x \in [0,1] \longmapsto e^x$.

1) Calculer $\Delta_n(f)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Soit $q \in \mathbb{N}$. Etablir que lorsque n tend vers l'infini :

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1/n}{e^{1/n} - 1} = \sum_{p=1}^{q} \frac{c_p}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

3) En déduire que :

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{2}, \quad c_{2p+1} = 0 \text{ si } p \in \mathbb{N}^*, \\ c_{2p} = \dfrac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \text{ si } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4) Soit $q \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la suite $(c_q)_{q\geqslant 0}$ donné au **II.**, établir la relation

$$p + \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r C_{2p}^{2r} B_r = 0$$

En déduire B_0, B_1, B_2 et B_3.

V. Cinquième partie : somme des puissances des n premiers entiers

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$s_r(n) = 1^r + 2^r + \ldots + n^r$$

En appliquant le résultat de la partie **II.** à $f : x \in [0,1] \longmapsto x^r$, prouver que $s_r(n)$ est un polynôme en n de degré $r+1$, à savoir :

$$s_r(n) = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{1}{r+1} \sum_{p=1}^{E(r/2)} (-1)^{p+1} C_{r+1}^{2p} B_p n^{r+1-2p}$$