HX3 Mathématiques

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N^{o}6

À remettre le lundi 24 février 2003

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1 :

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un espace vectoriel sur K, F un sous-espace de E, u un endomorphisme de E. Si F est stable par u, on appelle *endomorphisme induit par u sur F* l'application qui à x dans F associe $u(x) \in F$.

Dans tout le problème, E désigne un sous-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, I l'application identique de E.

I. Première partie :

1) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in K^*$. Montrer qu'il n'existe pas d'élément inversible g de $\mathcal{L}(E)$ tel que

$$f + \alpha I = g^{-1} \circ f \circ g$$

3) Soit u un endomorphisme de E.

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comparer $\ker u^k$ et $\ker u^{k+1}$ et démontrer que

$$\ker u^k = \ker u^{k+1} \implies \ker u^{k+1} = \ker u^{k+2}.$$

b. Énoncer et démontrer des propriétés analogues concernant les sous-espaces $\mathrm{im}\ u^k$.

c. Démontrer que $\ker u^n = \ker u^{n+1}$ et $\mathrm{im}\ u^n = \mathrm{im}\ u^{n+1}$.

d. Montrer que l'on a

$$E = \ker u^n \oplus \mathrm{im}\ u^n$$

II. Deuxième partie :

Dans la suite du problème, on étudie les couples (u, v) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient la propriété (P) suivante

$$(P) \qquad u \circ v - v \circ u = u$$

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant (P).

1) Montrer que $\mathrm{Tr} u = 0$ et que u n'est pas bijectif.

2) Déterminer tous les couples qui vérifient la propriété (P) dans le cas $n = 1$.

3) On suppose que $n = 2$.

a. Déterminer l'endomorphisme u^2 en exprimant sa matrice relativement à une base de E.

On suppose que $u \neq 0$.

b. Quel est la dimension de $\ker u$. Montrer que $\ker u$ est stable par v.

c. Montrer l'existence d'une base de E tel que la matrice de v soit triangulaire supérieure.

4) On suppose toujours que $n = 2$ et que $u \neq 0$.

a. Quel est l'ensemble des éléments a de E tels que $(a, u(a))$ soit une base de E ? Soit $\mathcal{B}$ une base ainsi constituée. Écrire la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$.

b. Déterminer par leur matrice relativement à $\mathcal{B}$ les éléments w de $\mathcal{L}(E)$ tels que (u, w) vérifie la propriétés (P) ; soit W l'ensemble qu'ils constituent.

c. Démontrer que pour chaque élément w de W, il existe une base $\mathcal{B}_w$ telle que la matrice de w relativement à cette base soit diagonale. Décrire les coefficients diagonaux ?

III. Troisième partie :

On ne suppose plus que $n = 2$ et l'on désigne par (u, v) un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie la propriétés (P).

1) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k.$$

2) On suppose que $\operatorname{im} u^n \neq \{0\}$. Montrer que $\operatorname{im} u^n$ est stable par u^n et v. En considérant les endomorphismes induit par u^n et v sur ce sous-espace, aboutir à une contradiction.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \ker u = 1$.

3) a. Établir par récurrence sur $k \geqslant 1$, $\dim \ker u^k = k$.

b. Établir l'existence de $e \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v(e) = \lambda e$.

4) a. Quels sont les éléments a de E tels que $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E ?

Dans la suite, a désigne un tel élément et $\mathcal{B} = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ la base associée.

b. Écrire sans plus de justifications la matrice de u, puis celle de u^k $(1 < k < n)$ relativement à $\mathcal{B}$. Quels sont les éléments de $\mathcal{B}$ qui constituent une base de $\ker u^k$.

c. Trouver $w_0 \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant (P) tel que la matrice de w dans la base $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit diagonale. Décrire les éléments diagonaux.

d. On considère $W = \{w - w_0 \in \mathcal{L}(E), w \text{ vérifie } (P)\}$. Montrer que W est un espace vectoriel. Établir que

$$W = \{v \in \mathcal{L}(E), \ \ v \circ u = u \circ v\}$$

e. Comparer W et $K[u] = \operatorname{Vect}\,(I, u, \dots, u^{n-1})$.

f. Démontrer que $v \in W \longmapsto v(a) \in E$ est injective.

g. En déduire $W = K[u]$ et décrire la forme des matrice de w vérifiant (P) dans la base $\mathcal{B}$.

Problème 2 :

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit pour la base canonique de cet espace, ce qui autorise à considérer l'image $\operatorname{im} A$ et le noyau $\ker A$ de la matrice.

On admettra les règles de calculs sur les matrices par blocs : si $(A, A') \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $(B, B') \in \mathcal{M}_{r,n-r,(}\mathbb{R})$, $(C, C') \in \mathcal{M}_{n-r,r,(}\mathbb{R})$ et $(D, D) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{R})$. Dans ces conditions :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

On considère $\mathcal{G}$ un groupe multiplicatif non réduit à $\{0\}$, et contenu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souligne qu'en général $\mathcal{G}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et peut contenir des matrices de rang $r < n$. Cependant toute matrice $A \in \mathcal{G}$ admet pour la multiplication des matrices un inverse dans $\mathcal{G}$; on notera A' cet inverse. Autrement dit, il existe dans $\mathcal{G}$ un élément neutre E, éventuellement différent de I_n, et tel pour tout $A \in \mathcal{G}$, on ait $AE = EA = A$ et $AA' = A'A = E$.

1) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,A, \mathrm{rg}\,B)$.
2) Montrer que les matrices de $\mathcal{G}$ ont le même rang $r \geqslant 1$.
3) a. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{im}\,E \oplus \ker E$.
b. Montrer que si $r < n$, E est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Que vaut E si $r = n$.
c. En déduire que si $r < n$, toute matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. Pour chaque entier $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, caractériser les groupes $\mathcal{G}$ de matrices de rang r à l'aide des sous-groupes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$.
4) a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Etablir l'équivalence des cinq propositions suivantes :
(i) A appartient à un groupe multiplicatif $\mathcal{G}$.
(ii) $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,A^2$.
(iii) $\mathrm{im}\,A = \mathrm{im}\,A^2$.
(iv) $\ker A = \ker A^2$.
(v) $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \mathrm{im}\,A$.
b. Donner, pour $n = 2$, un exemple de matrice non nulle n'appartenant à aucun groupe multiplicatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c. Montrer que pour que les cinq propositions du **3)** soient vérifiées, il faut et il suffit qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AX = XA, \quad X^2A = X \quad \text{et} \quad A^2X = A$$

d. Etablir dans ce cas que la matrice X est unique.
e. Comparer X à A' et en déduire avec les notations du **2) c.** que A' est semblable à :

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour A fixé, A' dépend-il du groupe auquel A appartient?
5) a. Soit $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ avec $r < n$. Montrer que B appartient à un groupe multiplicatif de matrices et que B' est de la forme $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où l'on calculera $C_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ et C_2 en fonction de B_1 et B_2.
b. Calculer A' pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.