HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}5

À remettre le mercredi 23 janvier 2003

Les deux problèmes sont indépendants.
Les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 : méthode de la loupe

L'objet du problème est d'étutier la vitesse de convergence des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ vers un point fixe l lorsque $f'(l) = 1$.

On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :

• Lorsque n tend vers l'infini, on a le développement asymptotique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

où γ est la constante d'Euler.

• On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalentes au voisinage de l'infini. On suppose de plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

Lorsque $\sum u_n$ converge, il en va de même de $\sum v_n$ et dans ces conditions, pour n tendant vers l'infini

$$\sum_{p=n}^{+\infty} u_p \sim \sum_{p=n}^{+\infty} v_p.$$

Lorsque $\sum u_n$ diverge, il en va de même pour $\sum v_n$ et dans ces conditions, pour n tendant vers l'infini

$$\sum_{p=0}^{n} u_p \sim \sum_{p=0}^{n} v_p.$$

I. Méthode des parties principales successives ou méthode de la loupe

Soit $f : [0, A] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, $f(0) = 0$. On suppose que si $x \in]0, A]$, $0 < f(x) < x$ et qu'il existe $a \neq 0$ et $\alpha > 0$ tels qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - ax^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})$$

Enfin, on choisit $u_1 \in]0, A]$ et on pose pour $n \geqslant 2$, $u_n = f(u_{n-1})$.

1) Montrer que $(u_n)_{n>0}$ est bien définie et étudier la convergence de cette suite.

2) Pourquoi $a > 0$?

3) Montrer qu'au voisinage de l'infini, $u_{n+1} \sim u_n$.

4) Soit $\beta > 0$. On pose pour $n > 0$:

$$v_n = \frac{1}{u_n^\beta} \quad \text{et} \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

Calculer β pour que $(w_n)_{n>0}$ ait une limite finie non nulle que l'on déterminera.

5) On choisit β comme à la question précédente. Montrer à l'aide du I. qu'au voisinage de l'infini $v_{n+1} - v_1 \sim \alpha a n$, puis que $v_n \sim \alpha a n$.

6) Conclure qu'au voisinage de l'infini :

$$u_n \sim \frac{1}{(\alpha a n)^{1/\alpha}}$$

7) Application : on suppose que $u_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $u_n = \sin u_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. Trouver un équivalent de u_n en l'infini.

II. Amélioration du développement asympotique

Comme dans la partie précédente, on considère $f : [0, A] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, $f(0) = 0$ et on suppose que si $x \in]0, A]$, $0 < f(x) < x$. De plus, on suppose qu'il existe $a > 0$ et $b \neq a^2$ tels qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - ax^2 + bx^3 + o(x^3)$$

Enfin, on choisit $u_1 \in]0, A]$ et on pose pour $n \geqslant 2$, $u_n = f(u_{n-1})$.

1) A l'aide de III.1), vérifier que $(u_n)_{n>0}$ est convergente vers 0.

2) Montrer qu'au voisinage de l'infini :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + a + (a^2 - b)u_n + o(u_n)$$

On pose pour $n > 0$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

3) Montrer qu'au voisinage de l'infini $v_n \sim na$.

On pose pour $n > 0$, $w_n = \dfrac{1}{u_n} - na = v_n - na$.

4) Montrer qu'au voisinage de l'infini :

$$w_{n+1} - w_n \sim \frac{a^2 - b}{an}$$

5) En utilisant les parties I. et II., prouver qu'au voisinage de l'infini :

$$w_n \sim \frac{a^2 - b}{a} \ln n$$

6) Conclure qu'au voisinage de l'infini :

$$u_n = \frac{1}{an} - \frac{a^2 - b}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

7) Application : on suppose que $u_1 = 1$ et $u_n = \ln(1+u_{n-1})$ pour $n \geqslant 2$. Etablir qu'au voisinage de l'infini :

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

<u>Problème 2 </u>: étude d'un système dynamique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \sin(2x)$.

1) a. Etudier $x \in [0,1] \longmapsto x - f(x)$. En déduire l'existence d'un unique $\alpha > 0$ tel que $\alpha = \sin 2\alpha$, et vérifier que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, 1\right[$.

b. Montrer que $f_{|[\frac{\pi}{4},1]}$ est contractante de $\left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$ dans lui-même.

c. Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $f(x) \geqslant \frac{4}{\pi}x$.

2) On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ et on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ par $x_{n+1} = \sin 2x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. On suppose que $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$. Montrer que $(x_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. Calculer une valeur approchée de α à moins de 10^{-6} près.

b. Montrer que, si $x_1 > 0$ (resp. $x_1 < 0$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $x_n \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$ (resp. $x_n \in \left[-1, -\frac{\pi}{4}\right]$). En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans tous les cas.