HX3 Mathématiques

Devoir en temps libre N^{o}3

Lundi 4 novembre 2002

Les trois problèmes sont indépendants.

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée et on hésitera pas à faire référence aux propriétés utilisées.

On laissera une marge à gauche.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Problème 1 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Dans ce problème, U désigne l'ensemble des complexes de module 1 et si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \{z \in U, \;\; z^n = 1\}$$

On admettra que π est irrationnel.

I. Soient H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$ et $H_+ = H \cap \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que H_+ est non vide.

2) On suppose que H_+ possède un plus petit élément a. Montrer que $H = a\mathbb{Z}$

3) On suppose que H_+ ne possède pas de plus petit élément. Montrer que $\inf H_+ = 0$ et en déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

4) Donner un exemple de sous-groupe de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ et distinct de $\mathbb{R}$.

II. Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

1) On suppose que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{p}$ avec $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $\mathrm{pgcd}(n,p) = 1$. Montrer que $H = \dfrac{a}{n}\mathbb{Z} = \dfrac{b}{p}\mathbb{Z}$.

2) On suppose que $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer alors que H est dense dans $\mathbb{R}$.

III. Une partie B du cercle trigonométrique U est dite dense dans U si : pour tout $z \in U$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in B$ tel que $|z - b| \leqslant \varepsilon$. On admettra que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$.

1) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|$.

2) Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$. Montrer que e^{iA} est dense dans U.

3) Montrer que $e^{i\pi\mathbb{Q}} = \{e^{i\pi q} \in U, q \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-groupe dense de U de cardinal infini tel que tout élément est d'ordre fini.

IV. Soient $a > 0$, $G = e^{ia\mathbb{Z}}$.

1) On suppose que $\dfrac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et on prend $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\dfrac{a}{2\pi} = \dfrac{n}{p}$ et $\mathrm{pgcd}(n,p) = 1$. Montrer que $G = U_p$.

2) On suppose que $\dfrac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que G est dense dans U.

3) Montrer que $(\cos n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1.1]$ (i.e. pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\cos n - x| \leqslant \varepsilon$). Même question avec $(\sin n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

4) Démontrer que si $A \subset [-1,1]$ est dense dans $[-1,1]$, pour toute partie F finie, $A\backslash F$ est encore dense dans $[-1,1]$.

5) Déduire de la question précédente que la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$.

V. Soient G un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n. Prouver que $G = U_n$.

Problème 2 : Valeurs rationnelles du cosinus

On désire déterminer les rationnels x tels que $\cos(\pi x)$ soit rationnel.

1) On pose $E = \{x \in \mathbb{Q}, \cos(\pi x) \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que E est parfaitement déterminé si l'on connaît $E \cap [0, 1/2]$. Vérifier que 0 et 1/2 appartiennent à E.

2) On suppose qu'il existe $\theta \in E$ avec $\theta \in]0, 1/2[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos(2^n\theta\pi)$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$.

On notera $\dfrac{p_n}{q_n}$ la forme réduite de u_n avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes (on posera $\theta = a/b$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et on considèrera la division euclidienne de $2^n a$ par $2b$ et on constatera que $\cos(2^n\theta\pi)$ ne prend au plus que $2b$ valeurs).

c. En exprimant pour tout $n \in \mathbb{N}$ p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n, montrer que $q_n = 1$, puis que $\cos(\theta\pi) = 1/2$.

3) Conclure et décrire E.

Problème 3 : Polygones réguliers

On note $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On appellera polygone régulier à n cotés toute suite $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ de U telle que les A_k sont deux à deux distincts, $A_0 = 1$, et :

$$|A_0 - A_1| = |A_1 - A_2| = \ldots = |A_{n-2} - A_{n-1}| = |A_{n-1} - A_0|$$

La longueur $|A_0 - A_1|$ est appelé la longueur des cotés du polygone régulier.

1) Soient θ et θ' deux réels. Exprimer le longueur de la corde entre $e^{i\theta}$ et $e^{i\theta'}$ i.e $|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|$.

2) Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ un polygone régulier. Montrer que si $A_1 = e^{i\alpha}$, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $A_k = e^{ik\alpha}$ et $n\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

On pose $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $z_k = z_1^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3) Soit $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Montrer que le module $|z_{p+k} - z_k|$ est indépendant de k et calculer ce module.

4) Soient $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer le module $\left|\dfrac{z_{p+k} + z_k}{2}\right|$: c'est l'apothème, distance de 0 aux cotés du polygone.

5) On suppose toujours que $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Montrer que pour que les nombres complexes z_0, z_p, z_{2p}, $\ldots$, z_{mp}, $\ldots$, $z_{(n-1)p}$ soient distincts deux à deux, il faut et il suffit que p soit premier avec n.

6) Soit $(m, m') \in \{1, 2, \ldots, n-1\}^2$. A quelle condition sur m et m' a t-on $|z_m - 1| = |z_{m'} - 1|$?

7) En déduire que le nombre de longueurs possibles des cotés pour un polygone régulier à n cotés est égal à $\dfrac{\varphi(n)}{2}$, où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers de $\{1, 2, \ldots, n\}$ premiers avec n.

8) Ici $n = 8$ (octogones). Combien y a-t-il de longueurs possibles pour les cotés d'un octogone régulier. Calculer ces longueurs.

Octogones réguliers.

9) Ici $n = 12$ (dodécagones). Mêmes question qu'en 8). Calculer $\sin \dfrac{\pi}{12}$ et $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

10) Ici $n = 5$ (pentagones). Mêmes question qu'en 8) (on établira la relation $\cos \dfrac{4\pi}{5} + \cos \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{1}{2} = 0$ et on calculera alors $\cos \dfrac{2\pi}{5}$, $\sin \dfrac{2\pi}{5}$, $\cos \dfrac{\pi}{5}$, $\sin \dfrac{\pi}{5}$.)

11) Ici $n = 7$ (heptagones). Montrer qu'il y a trois heptagones réguliers. Soient $a \leqslant b \leqslant c$ leurs cotés. Prouver la relation :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

(on pourra évaluer a, b et c en fonction de $e^{\frac{i\pi}{7}}$)