HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}9

Samedi 17 avril 1999

- Durée : 4 heures -

L'épreuve est constitué d'un unique problème. Les trois premières parties sont largement indépendantes. La quatrième et la cinquième utilisent des résultats de ces trois premières parties qui peuvent éventuellement être admis.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction. Pour tout développement limité et toute utilisation des notations de Landau, on n'ommettra pas de préciser au voisinage de quel point l'on se place. Les changements de variables, comme les intégrations par parties doivent être signalés. Les calculs doivent figurer sur la copie et être menés avec soin. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.

Développement asymptotique des sommes de Riemann

Soient $a < b$ deux réels. On note C l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[a, b]$. Pour tout $f \in C$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

et

$$\Delta_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f)$$

Le but du problème est d'établir un développement asymptotique de $\Delta_n(f)$ lorsque n tend l'infini.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $(c_k)_{0\leqslant k\leqslant q}$ et $(c'_k)_{0\leqslant k\leqslant q}$ familles de $\mathbb{R}$ telles que :

$$u_n = c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_q}{n^q} + o\left(\frac{1}{n^q}\right) = c'_0 + \frac{c'_1}{n} + \ldots + \frac{c'_q}{n^q} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

Dans ces conditions, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $c_k = c'_k$.

I. Première partie : Convergence des sommes de Riemann

1) Soit $f \in C$. Redémontrer que $\Delta_n(f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

2) Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{ch}\ (k/n) + 1}$.

3) En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\sqrt{n^2-kn+k^2}}=1+2\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$$

(on pourra se servir de la relation $\operatorname{Argsh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln 3$)

II. Deuxième partie : Existence du développement asymptotique

On suppose que $a=0$ et $b=1$. Soit $q\geqslant 0$ un entier. Soit $f\in C$.

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $0\leqslant k\leqslant n$, on pose $x_k=k/n$. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, établir que :

$$\begin{aligned}\Delta_n(f) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p f^{(p)}(x_k)}{(p+1)!n^{p+1}}+W_n\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{f'(x_k)}{2!n^2}+\frac{f''(x_k)}{3!n^3}-\ldots+(-1)^q\frac{f^{(q)}(x_k)}{(q+1)!n^{q+1}}\right)+W_n\end{aligned}$$

avec $|W_n|\leqslant\dfrac{\sup_{x\in[0,1]}|f^{(q+1)}|}{(q+2)!n^{q+1}}$.

2) En déduire que :

$$\Delta_n(f)=\sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p S_n(f^{(p)})}{(p+1)!n^p}+o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

3) On suppose qu'il existe c_1, c_2,…, c_{q-1} dans $\mathbb{R}$ tels que pour toute fonction $g\in C$ et tout $q'\leqslant q-1$:

$$\Delta_n(g)=\sum_{p=1}^{q'}c_p\frac{g^{(p-1)}(1)-g^{(p-1)}(0)}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^{q'}}\right)$$

a. Montrer que si l'on pose $c_0=-1$, on obtient pour tout $1\leqslant p\leqslant q$:

$$S_n\left(f^{(p)}\right)=-\sum_{r=0}^{q-p}c_r\frac{f^{(p+r-1)}(1)-f^{(p+r-1)}(0)}{n^r}+o\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$$

b. En déduire :

$$\Delta_n(f)=\sum_{l=1}^{q}\left[\left(\sum_{r=0}^{l-1}\frac{(-1)^{l-r+1}}{(l-r+1)!}c_r\right)\frac{f^{(l-1)}(1)-f^{(l-1)}(0)}{n^l}\right]+o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

On considère dans la suite du problème, la suite $(c_p)_{p\geqslant 0}$ définie par récurrence par :

$$c_0=-1\quad\text{et}\quad c_q=\sum_{r=0}^{q-1}\frac{(-1)^{q-r+1}}{(q-r+1)!}c_r=\sum_{s=2}^{q+1}\frac{(-1)^s}{s!}c_{q-s+1}\ \ (q\geqslant 1)$$

4) Démontrer par récurrence que pour toute $f \in C$ et tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_n(f) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

5) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à q. Montrer rapidement que la formule du **4)** est exacte, i.e. :

$$\Delta_n(P) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{P^{(p-1)}(1) - P^{(p-1)}(0)}{n^p}$$

(on constatera notamment que la formule du **1)** est exacte, i.e. $W_n = 0$)

6) On revient au cas général avec $a < b$ quelconques. A l'aide d'un changement de variable affine, prouver que pour tout $f \in C$ et tout $q \geqslant 0$:

$$\Delta_n(f) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{\left(f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)\right)(b-a)^p}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

et si $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à q :

$$\Delta_n(P) = \sum_{p=1}^{q} c_p \frac{\left(P^{(p-1)}(b) - P^{(p-1)}(a)\right)(b-a)^p}{n^p}$$

III. Troisième partie : Nombres de Bernoulli

Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_n(u) = \int_0^1 t^n e^{tu} \mathrm{d}t$$

1) a. Montrer que pour tout $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $(u, u_0) \in]-A, A[$ et tout $t \in [0, 1]$, on ait :

$$\left|e^{ut} - e^{u_0 t} - (u - u_0)te^{u_0 t}\right| \leqslant M(u - u_0)^2$$

b. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ecrire sous forme intégrale la différence :

$$\frac{F_n(u) - F_n(u_0)}{u - u_0} - F_{n+1}(u_0) \text{ pour } u \neq u_0$$

et étudier sa limite lorsque u tend vers u_0, $u \neq u_0$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Conclure que F_n est dérivable et que $F_n' = F_{n+1}$.

On considère la fonction :

$$\varphi : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } u = 0 \\ \dfrac{e^u - 1}{u} \text{ si } u \neq 0 \end{cases}$$

2) a. A l'aide du **1)**, montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que $\psi = 1/\varphi$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. Soit $q \in \mathbb{N}$. Justifier le développement limité lorsque $u \neq 0$ tend vers 0 :

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{p=0}^{q} \frac{\psi^{(p)}(0)}{p!} u^p + o(u^q)$$

c. Calculer $\psi'(0)$.

d. Montrer que pour $u \neq 0$:

$$\frac{u}{e^u - 1} + \frac{u}{2} = \frac{u}{2} \coth \frac{u}{2}$$

En déduire que pour $p \geqslant 3$, p impair, $\psi^{(p)}(0) = 0$.

On notera dans la suite du problème, B_p le p-ième nombre de Bernoulli défini pour $p \geqslant 0$ par :

$$B_p = (-1)^{p+1} \psi^{(2p)}(0)$$

On a donc pour $u \neq 0$, u tendant vers 0 :

$$\frac{u}{e^u - 1} = -\frac{u}{2} + \sum_{p=0}^{q} \frac{(-1)^{p+1} B_p}{(2p)!} u^{2p} + o(u^{2q+1}) = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^{p+1} B_p}{(2p)!} u^{2p} + o(u^{2q+1})$$

IV. Quatrième partie : Utilisation d'une fonction test

On considère $f : x \in [0,1] \longmapsto e^x$.

1) Calculer $\Delta_n(f)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Soit $q \in \mathbb{N}$. Etablir que lorsque n tend vers l'infini :

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1/n}{e^{1/n} - 1} = \sum_{p=1}^{q} \frac{c_p}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

3) En déduire que :

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{2}, \quad c_{2p+1} = 0 \text{ si } p \in \mathbb{N}^*, \\ c_{2p} = \dfrac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \text{ si } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4) Soit $q \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la suite $(c_q)_{q \geqslant 0}$ donné au **II.**, établir la relation

$$p + \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r C_{2p}^{2r} B_r = 0$$

En déduire B_0, B_1, B_2 et B_3.

V. Cinquième partie : somme des puissances des n premiers entiers

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$s_r(n) = 1^r + 2^r + \ldots + n^r$$

En appliquant le résultat de la partie **II.** à $f : x \in [0,1] \longmapsto x^r$, prouver que $s_r(n)$ est un polynôme en n de degré $r+1$, à savoir :

$$s_r(n) = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{1}{r+1} \sum_{p=1}^{E(r/2)} (-1)^{p+1} C_{r+1}^{2p} B_p n^{r+1-2p}$$