HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}8

Samedi 22 mars 2003

- Durée : 4 heures -

Exercice

K désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Un polynôme P de $K[X]$ est dit simple si et seulement si $\deg(P) \geqslant 1$ et $PGCD(P, P') = 1$.

1. Montrer que toutes les racines d'un polynôme simple sont simples.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P est simple dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si P est simple dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer les polynômes simples dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
4. (a) Montrer que tout élément non nul Q de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit sous la forme :

$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\quad P_1, \dots, P_r \quad$ simples, unitaires, premiers entre eux deux à deux, et $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$.
(On pourra introduire les ordres de multiplicité des racines de Q .)

   (b) Montrer que la décomposition précédente est unique.

   On admettra que le résultat précédent reste valable pour $\mathbb{R}[X]$.

5. Soit $Q \in K[X]$, $\quad Q = \lambda \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de polynômes simples établie à la question 4.

   (a) On pose $R = PGCD(Q, Q')$. Exprimer R en fonction des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_r$ et des entiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

   (b) On définit la suite de polynômes $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ par la relation de récurrence :

$$Q_1 = PGCD(Q, Q'), \text{ et pour tout } i \geqslant 1, \quad Q_{i+1} = PGCD(Q_i, Q_i').$$

   Que valent Q_{α_1} et Q_{α_r}?

   (c) En déduire un algorithme de décomposition d'un polynôme de $K[X]$ en produit de facteurs simples, unitaires, deux à deux premiers entre eux.

6. Utiliser l'algorithme précédent pour décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme
$$Q = X^4 - 10X^3 + 26X^2 - 10X + 25$$
7. On donne les commandes MAPLE suivantes :
si P et Q sont deux polynômes de la variable x, (par exemple $P := x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 25$)
$gcd(P, Q)$ calcule le $PGCD$ de P et Q ;
$degree(P, x)$ renvoie le degré de P ;
$coeff(P, x, n)$ renvoie le coefficient du monôme de degré n.
Ecrire une procédure MAPLE qui prend en argument le polynôme P et qui renvoie la décomposition de P en produit de facteurs simples, unitaires, deux à deux premiers entre eux..

Problème 1

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $\mathbb{R}_n[X]$ comme l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

$(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ désigne une suite donnée de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}, \quad \deg(u_p) = p$.

Dans tout le problème, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Soit $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in [a, b]^{n+1}$ tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\} \quad x_i < x_{i+1}$.

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est le polynôme d'interpolation de f pour le support $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ si et seulement si pour tout $i \in \{0, \ldots, n\} \quad P(x_i) = f(x_i)$.

Première partie

1. Montrer l'existence et l'unicité de P.
2. On pose

$$A = (u_i(x_j))_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

$$F = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ et } U(x) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

   (a) Montrer que $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n|X]$.
   (b) En déduire que $P(x) =^t FA^{-1}U(x)$.

Deuxième partie

3. On suppose dans cette question et dans la question 7 que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} (x - x_i)$$

où $P \in \mathbb{R}_n[X]$ désigne le polynôme d'interpolation de f pour le support $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

4. On définit les polynômes de Tchebycheff $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$T_o = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et pour tout } p \geqslant 1 \quad T_{p+1} = 2XT_p - T_{p-1}$$

Montrer que si $y \in [-1, 1]$, en posant $y = \cos(\theta)$, on a $T_p(y) = \cos(p\theta)$ et que si $y \geqslant 1$, en posant $y = \cosh(\theta)$, on a $T_p(y) = \cosh(p\theta)$

5. Soit $n \geqslant 1$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n.
En considérant $Q - 2^{1-n}T_n$ aux points $x_j = \cos(\frac{j\pi}{n})$ pour $j \in \{0, \ldots, n\}$ montrer que

$$\sup_{y \in [-1,1]} |Q(y)| \geqslant 2^{1-n}$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in [-1,1]^{n+1}} \left\{ \sup_{y \in [-1,1]} \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} |y - y_i| \right\} = 2^{-n}$$

Montrer que cette valeur est atteinte pour des valeurs de y que l'on précisera, lorsque les $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont les racines du polynôme T_{n+1}.

7. Conclure que, pour un choix de $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in [a, b]^{n+1}$ que l'on explicitera, le polynôme d'interpolation P correspondant sera tel que

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{2^{2n+1}} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Problème 2

On se propose dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes $\mathbb{C}$. On rappelle que si K est un sous-corps d'un corps K', ce dernier est, en particulier un K-espace vectoriel ce qui donne un sens à la K-dimension de K' notée $\dim_K(K')$.

Si K est un corps on note $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K. On dit qu'un polynôme de degré > 0 est irréductible s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés > 0.

Première partie

On désigne par K un sous-corps de $\mathbb{C}$, par α un nombre complexe non nul, par $K[\alpha]$ le sous-K-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les nombres $\alpha^n, n = 0, 1, 2, \ldots$

On note enfin $I_K(\alpha)$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ annulés par α.

1. (a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes

   i. $K[\alpha]$ est un K espace vectoriel de dimension finie.

   ii. $I_K(\alpha) \neq \{0\}$

   Si elles sont remplies, on dit que α est K-algèbrique, ce que l'on suppose dans la suite de cette question.

   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que tout élément de $I_K(\alpha)$ soit multiple de P.
   Montrer que P est irréductible.
   Ce polynôme P sera noté $P_K(\alpha)$ et appelé polynôme minimal de α.

   (c) Comparer le degré de $P_K(\alpha)$ et $\dim_K(K[\alpha])$.

   (d) Montrer que $K[\alpha]$ est un corps.

2. Applications numériques. On prend $K = \mathbb{Q}$.

   (a) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{2}$.

   (b) Montrer que $P = X^4 - X^2 - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
   En déduire le polynôme $\mathbb{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Deuxième Partie

On définit K et α comme dans la première partie. On suppose que α est K-algébrique et on pose $n = \dim_K(K[\alpha])$.

3. Montrer que si P est un élément irréductible de $K[X]$, ses zéros dans $\mathbb{C}$ sont tous simples.

4. (a) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les zéros de $P_K(\alpha)$ dans $\mathbb{C}$.
   Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$ il existe un unique morphisme de K-algèbre σ_i de $K[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\sigma_i(\alpha) = \lambda_i$.

   (b) Obtient-on de cette manière tous les morphismes de K-algèbres de $K[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$?

5. Soit β un élément de $K[\alpha]$ tel que les $\sigma_i(\beta)$ soient deux à deux distincts.

   (a) Soit $K' = K[\beta]$. Montrer que K' est un corps.

   (b) Montrer que $K[\alpha] = K'[\alpha]$.

   (c) Montrer que le seul morphisme de K'-algèbre de $K[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ est l'injection canonique.

   (d) En déduire que $K[\alpha] = K[\beta]$.

6. Soit β un élément de $K[\alpha]$.
   Démontrer l'existence de deux éléments β_1 et β_2 de $K[\alpha]$ vérifiant $K[\beta_1] = K[\beta_2] = K[\alpha]$ et $\beta_1 + \beta_2 = \beta$

(Indication : On pourra chercher β_i sous la forme $\alpha + \lambda\beta$ et introduire pour $i \neq j$ l'ensemble $E_{i,j}$ des éléments λ de K vérifiant $\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)$)