HX3 Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ N^{o}7

Samedi 1er mars 2003

- Durée : 4 heures -

L'épreuve est composée d'un problème.

Les quatre premières parties introduisent les notions essentielles relatives à la dualité. Le résultat de la partie **V.** *n'est pas réutilisé dans la suite du problème. Les quatre dernières parties sont consacrées à la réduite de Jordan des endomorphismes nilpotents.*

Dualité en dimension finie. Applications à la réduction des endomorphismes nilpotents.

Dans tout le problème, K désigne un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

On rappelle qu'une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans K. L'espace dual E^* est l'ensemble des formes linéaires de E. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on note $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de E^* qui est définie par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

I. Dualité et hyperplans

1) Soit $u \in E^*$ non nulle. Montrer que $H = \ker u$ est un hyperplan de E.

On dit que "$u(x) = 0$" est une *équation cartésienne de l'hyperplan H*.

2) Soient u et v dans E^* non nulles. On suppose que $\ker u = \ker v$. On note $H = \ker u$. On fixe $a \in E \backslash H$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $v(a) = \lambda u(a)$. En déduire que $v = \lambda u$.

3) Soit H un hyperplan de E. Construire une forme linéaire $u \in E^*$ telle que $\ker u = H$.

4) Conclure en énonçant un théorème d'existence et d'unicité d'équations cartésiennes pour un hyperplan donné H.

II. Le crochet de dualité

On pose pour $u \in E^*$ et $x \in E$: $< u, x >= u(x)$. $(u, x) \in E^* \times E \longmapsto < u, x >= u(x) \in K$ est une application appelée *crochet de dualité*.

1) Démontrer que le crochet de dualité est bilinéaire i.e. pour tout $(u, x) \in E^* \times E$, les applications $v \in E^* \longmapsto < v, x > \in K$ et $y \in E \longmapsto < u, y >$ sont linéaires.

Soient $u \in E^*$ et $x \in E$. On dit que u et x sont *orthogonaux* si $< u, x >= u(x) = 0$. Si $A \subset E$ et $B \subset E^*$, on définit ainsi l'*orthogonal de A* :

$$A^{\perp} = \{u \in E^*,\ \forall x \in A,\ < u, x >= 0\}$$

et l'*orthogonal de* B :

$$B^o = \{x \in E,\ \forall u \in B,\ < u, x >= 0\}$$

2) a. Montrer que si $A \subset E$, $A^\perp$ est un sous-espace de E^*.

b. Soit $A_1 \subset A_2 \subset E$. Que peut-on dire de $A_1^\perp$ et $A_2^\perp$?

c. Soit $A \subset E$. Montrer $A^\perp = [\text{Vect }(A)]^\perp$.

d. Soit $A \subset E$. Montrer que $A \subset (A^\perp)^o$.

3) Enoncer sans démonstration des propriétés similaires concernant l'orthogonal des parties de E^*.

4) Déterminer $(E^*)^o$.

III. Représentations cartésiennes des sous-espaces

1) a. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^{*p}$ un système libre de formes linéaires sur E. Exprimer $F = \{u_1, \dots, u_p\}^o$ à l'aide des noyaux $\ker u_i$. Préciser la dimension de F.

On dira dans ces conditions que $(u_1, \dots, u_p)$ est une *représentation régulière cartésienne du sous-espace* F et on écrira :

$$F : \begin{cases} u_1(x) = 0 \\ u_2(x) = 0 \\ \quad\vdots \\ u_p(x) = 0 \end{cases}$$

b. Soit G un sous-espace de E^*. Etablir $\dim G + \dim G^o = \dim E$.

2) Soit F un sous-espace de E.

a. Démontrer l'existence de $(u_1, \dots, u_p) \in E^{*p}$, système libre de E^* constituant une représentation régulière de F.

b. Etablir $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

3) Soient F un sous-espace de E et G un sous-espace de E^*. Montrer que $(F^\perp)^o = F$ et $(G^o)^\perp = G$.

4) On suppose $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^3$ et $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Donner une représentation régulière de $F = \mathbb{R}e$.

IV. Transposée d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{cccc} & E^* & \longrightarrow & E^* \\ {}^t f : & u & \longmapsto & u \circ f \end{array}$$

est un endomorphisme de E^*.

${}^t f$ est appelé *transposée de* f.

2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base E. On note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que la matrice de ${}^t f$ dans la base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est ${}^t A$.

3) Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in K$. Démontrer les égalités suivantes :

$${}^t(f + g) = {}^t f + {}^t g,\ \ {}^t(\lambda f) = \lambda {}^t f,\ \ {}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g,\ \ \text{rg } f = \text{rg } {}^t f$$

4) Montrer que $\ker {}^t f = (\text{im } f)^\perp$ et $(\ker f)^\perp = \text{im } {}^t f$.

V. Multiplicateurs de Lagrange

Soit $(u_1, \dots, u_p, v) \in (E^*)^{p+1}$. On suppose que pour tout $x \in E$:

$$u_1(x) = u_2(x) = \ldots = u_p(x) = 0 \Longrightarrow v(x) = 0$$

Montrer l'existence de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans K tels que :

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$$

VI. Indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$. On appelle indice de nilpotence le plus petit de ces entiers naturels. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et p son indice de nilpotence.

1) Montrer que $\ker f \neq \{0\}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que si $\ker f^{k+1} = \ker f^k$, pour tout $l \geqslant k$, $\ker f^l = \ker f^k$.

3) En déduire que $p \leqslant n$.

VII. Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice n

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^n = 0$ (f est nilpotent) et $f^{n-1} \neq 0$.

1) Montrer l'existence de $e \in E$ tel que $(e, f(e), f^2(e), \dots, f^{n-1}(e))$ soit une base de E.

2) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

J_n est appelée *matrice de Jordan de taille n.*

VIII. Réduction des endomorphismes nilpotents dans le cas général

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence $p < n$. On fixe $e \in E$ tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$.

1) Montrer que $E_1 = \text{Vect }(f^k(e))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est un sous-espace de E, stable par f, de dimension p.

2) Justifier l'existence de $u \in E^*$ tel que $u(f^{p-1}(e)) \neq 0$.

3) Démontrer que $G = \text{Vect }({}^t f^k(u))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est un sous-espace de E^* stable par ${}^t f$ de dimension p.

4) Montrer que G^o est stable par f.

5) Montrer que $G^o \cap E_1 = \{0\}$.

6) En déduire l'existence d'une base de $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{J_{p_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{p_2}} & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \boxed{J_{p_{k-1}}} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{J_{p_k}} \end{pmatrix}$$

où les J_{p_i} $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont des matrices blocs de Jordan de taille p_i (voir partie **VII.**). Cette matrice porte le nom de *réduite de Jordan de l'endomorphisme* f.

IX. Unicité des tailles des blocs de Jordan

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent et $\mathcal{B}$ une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{J_{p_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{p_2}} & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \boxed{J_{p_{k-1}}} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{J_{p_k}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } J_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_i}(K)$$

pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On suppose de plus $p_1 \geqslant p_2 \ldots \geqslant p_k \geqslant 1$. On admettra que si $l \geqslant 0$:

$$M^l = \begin{pmatrix} \boxed{J_{p_1}^l} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{p_2}^l} & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \boxed{J_{p_{k-1}}^l} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{J_{p_k}^l} \end{pmatrix}$$

1) Prouver que $\dim \ker f = k$.
2) Prouver $\dim \ker f^2 = k + \operatorname{Card}\{i \in [\![1, k]\!] \ , \ p_i \geqslant 2\}$.
3) Conclure à l'unicité de k et des entiers $p_1, \ldots, p_k$.