HX3 **Mathématiques**

TEST N^{o}2 ET DEVOIR SURVEILLÉ N^{o}6

Samedi 25 janvier 2003

- Durée : 50 minutes et 3 heures -

Test de connaissances :

Les calculs nécessaires doivent figurer sur la copie.

1) Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{\cos(\ln x)}{\sqrt{\sin x}}$. Calculer sa dérivée.

2) Rappeler l'énoncé exact du théorème de la formule de Taylor-Lagrange.

3) Rappeler la définition d'une fonction convexe. Qu'entend t-on par inégalité aux pentes des sécantes ? En donner une illustration.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pourquoi la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ admet-elle un développement limité en 0 à l'ordre n ? Donner l'expression de ce développement.

5) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$.

6) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{sh} 3x}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}$.

7) Donner un développement asymptotique de trois termes de $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$ pour x tendant vers $+\infty$.

8) Donner un développement asymptotique de trois termes de $x \longmapsto \tan x$ pour x tendant vers $\dfrac{\pi}{2}$ (avec des puissances de $\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$).

9) Grâce à la théorie des développements limités, démontrer que les fonctions $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \sin(x^2)$ et $x \longmapsto \sin(x^3)$ sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Devoir n^{o}6 :

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Seules les questions convenablement illustrées lorsque la situation l'exige seront corrigées.

La quatrième partie n'est pas à rédiger en temps limité.

Il sera tenu grand compte de la rédaction et seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Nous notons f^n la n-ième itérée de f c'est-à-dire :

$$f^0 = I_{\mathbb{R}}, \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f \circ f^n$$

Nous dirons que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$. Plus généralement, nous dirons que x_0 est un point périodique de f s'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $f^q(x_0) = x_0$ et nous appellerons période de x_0 le plus petit entier $q \geqslant 1$ vérifiant cette égalité. Si, de plus, $|(f^q)'(x_0)| < 1$, nous dirons que x_0 est un point périodique attractif de f. Nous appellerons orbite d'un point périodique x_0 de période q l'ensemble :

$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ f^i(x_0),\ 0 \leqslant i \leqslant q-1 \right\}$$

Si x_0 est un point périodique attractif, nous dirons que $\mathcal{O}(x_0)$ est une orbite périodique attractive.

Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, U un ouvert de $\mathbb{R}$, on pourra utiliser sans démonstration le fait que $g^{<-1>}(U)$, image réciproque de U par g, est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère :

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f_c : & x & \longmapsto & x^2 + c \end{array}$$

Le but du problème est de montrer que chaque fonction f_c a au plus une orbite périodique attractive. On notera pour $n \in \mathbb{N}$, $(f_c)^n = f_c^n$.

Questions préliminaires :

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, $x_0 \in I$. On suppose que $g'(x_0) = 0$ et $g''(x_0) > 0$. Rappeler ce qu'on peut dire du point x_0. Même question avec $g'(x_0) = 0$ et $g''(x_0) < 0$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(f^n)'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'\left(f^i(x)\right)$$

3) Soit x_0 un point périodique de f de période q.

a. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on écrit $N = bq + r$ où $b \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$. Montrer que :

$$f^N(x_0) = f^r(x_0)$$

b. Soient $i < j$ dans $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Montrer que :

$$f^i(x_0) \neq f^j(x_0)$$

c. En déduire que pour tout $1 \leqslant i \leqslant q-1$, $f^i(x_0)$ est un point périodique de période q et dont l'orbite est exactement celle de x_0.

d. On suppose de plus que x_0 est un point périodique attractif. Montrer que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant q-1$, $f^i(x_0)$ est aussi un point périodique attractif.

I. Première partie :

Soit $c \in \mathbb{R}$.

1) On suppose $c > \frac{1}{4}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty$$

Quels sont les points périodiques de f_c ?

2) On suppose $c = \frac{1}{4}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|x| > \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty$$

et que si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = \frac{1}{2}$$

Quels sont les points périodiques de f_c ? Quels sont les orbites de ces points ?

3) On suppose $c < \frac{1}{4}$.

a. Prouver que f_c admet deux points fixes α et β, vérifiant $-\beta < \alpha < \beta$ et si $x \in \mathbb{R}$, $|x| > \beta$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = +\infty$$

b. Tracer le graphe de f_{-1}.

c. Pour quelles valeurs de c a-t-on l'inclusion :

$$f_c([-\beta,\beta]) \subset [-\beta,\beta]$$

Montrer que si cette inclusion n'est pas vérifiée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_c^n(0) = +\infty$$

d. Pour quelles valeurs de c, le point α est-il un point périodique attractif ?

e. On suppose $0 \leqslant c < \frac{1}{4}$. Montrer alors que si $x \in]-\beta,\beta[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_c^n(x) = \alpha$$

Quels sont les points périodiques de f_c ? Lesquels d'entre eux sont attractifs ? Quelles sont les orbites périodiques attractives ?

II. Deuxième partie :

Nous supposerons dans cette partie que x_0 est un point périodique attractif de période q de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et nous posons $g = f^q$.

1) a. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[, \quad \lim_{n\to+\infty} g^n(x) = x_0$$

b. En déduire que l'ensemble

$$U_{x_0} = \left\{ x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} g^n(x) = x_0 \right\} \quad \text{est ouvert.}$$

Dans la suite de cette partie, on notera I_{x_0} la réunion des intervalles contenant x_0 et contenus dans U_{x_0}.

2) Montrer que I_{x_0} est un intervalle ouvert.

Dans la suite de cette partie, nous supposerons que I_{x_0} est borné et on notera $I_{x_0} =]a,b[$.

3) Etablir les inclusions :

$$g(]a,b[) \subset]a,b[\quad \text{et} \quad g(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$$

4) On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

a. Montrer que la dérivée de $h = g \circ g$ ne s'annule pas sur $]a,b[$ et que $h(a) = a$ et $h(b) = b$.

b. En déduire qu'il existe $a' \in]a,x_0[$ et $b' \in]x_0,b[$ tels que :

$$h'(a') = h'(b') = 1$$

III. Troisième partie :

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ vérifiant la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0 \Longrightarrow \quad 2f'''(x)f'(x) - 3f''(x)^2 < 0$$

et on appellera point critique de f un point $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f'(x) = 0$$

1) Montrer que les applications suivantes appartiennent à $\mathcal{E}$ et déterminer dans chaque cas l'ensemble des points critiques :

$$x \longmapsto \sin x, \quad x \longmapsto e^{\lambda x}, \quad x \longmapsto x^2 + c$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que si f et g sont dans $\mathcal{E}$, il en est de même de $f \circ g$. En déduire que si $f \in \mathcal{E}$ et $n \geqslant 1$, alors $f^n \in \mathcal{E}$.

3) Soit $f \in \mathcal{E}$.

a. Montrer que si l'application $x \longmapsto |f'(x)|$ admet un minimum local en un point x_1 alors $f'(x_1) = 0$.

b. En déduire que si la dérivée de f ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors pour tout $x \in]a, b[$:

$$|f'(x)| > \inf\left(|f'(a)|, |f'(b)|\right)$$

4) Soit $f \in \mathcal{E}$ admettant un point périodique x_0 de période q. A l'aide des résultats des parties **II.** et **III**. vérifier que l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- Pour tout $x \in]-\infty, x_0]$, $\lim_{n\to+\infty} f^{qn}(x) = x_0$.
- Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} f^{qn}(x) = x_0$.
- Il existe un point critique $y \in \mathbb{R}$ de f et $x \in \mathcal{O}(x_0)$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} f^{qn}(y) = x$$

IV. Quatrième partie :

1) On suppose $-2 \leqslant c < 0$. Montrer que si x_0 et x_1 sont deux points périodiques attractifs de f_c, ils ont la même orbite.

2) On suppose $c < -2$. Montrer que f_c n'a pas de point périodique attractif.

3) Plus généralement, montrer que si P est un polynôme de degré $d \geqslant 2$ tel que les racines de P' sont réelles, l'application $x \longmapsto P(x)$ a au plus $d - 1$ orbites attractives (on commencera par exprimer la fraction rationnelle $\frac{P''}{P'}$ en fonction des racines de P').