



# Mathématiques

## DEVOIR SURVEILLÉ N°5

Mercredi 18 décembre 2002

- Durée : 4 heures -

*Les deux problèmes sont totalement indépendants.*

*On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé.*

*Il sera tenu grand compte de la rédaction et seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.*

### Problème 1 : Inégalité de Bernstein

Dans tout ce problème, si  $f$  est une fonction bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on note  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

Pour une fonction  $k$ -fois dérivable, on notera  $f^{(k)}$  la dérivée  $k$ -ième de  $f$  et par convention  $f^{(0)} = f$ . On appelle zéro de  $f$  tout réel  $x$  vérifiant  $f(x) = 0$ .

On considère un entier  $n$  strictement positif et on note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  pour lesquelles il existe  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  des réels tels que

$$f : x \longmapsto \sum_{j=0}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)).$$

On dit que les éléments de  $\mathcal{T}_n$  sont des *polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$* .

Le but du problème est de majorer  $\|f'\|_\infty$  en fonction de  $\|f\|_\infty$  lorsque  $f \in \mathcal{T}_n$ .

Dans tout le problème on fixe  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  des réels et  $f \in \mathcal{T}_n$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)).$$

#### I. Généralités.

1) Montrer que  $f$  est  $2\pi$ -périodique, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , bornée sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\|f\|_\infty \leq \sum_{j=0}^n (|a_j| + |b_j|).$$

2) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(k)} \in \mathcal{T}_n$ .

3) La fonction  $f$  est-elle uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  ?

4) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $s : x \in \mathbb{R} \longmapsto a \sin(nx + b)$ . Démontrer que  $s \in \mathcal{T}_n$  et que  $\|s'\|_\infty = n\|s\|_\infty$ .

## II. Majoration du nombre de zéros de $f$ .

On suppose dans cette partie qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f$  s'annule en  $2n+1$  points distincts de l'intervalle  $[\alpha, \alpha + 2\pi[$  et on se propose de montrer que les  $a_j$  et  $b_j$  sont nuls.

1) Montrer que  $f'$  s'annule en  $2n+1$  points distincts de  $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ . En déduire le même résultat pour  $f^{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2) On pose pour  $k \geq 0$ ,  $g_k = \frac{1}{n^{4k}} f^{(4k)}$ . Calculer  $g_k(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et démontrer que l'on peut écrire

$$g_k(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \varepsilon_k(x),$$

où  $\varepsilon_k$  est telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varepsilon_k\|_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varepsilon'_k\|_\infty = 0.$$

3) On suppose dans cette question que  $(a_n, b_n) \neq (0, 0)$ . Montrer que la fonction  $l_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$  s'annule en exactement  $2n$  points distincts de l'intervalle  $[\alpha, \alpha + 2\pi[$  et calculer  $|l'_n(x)|$  en chacun de ces zéros.

4) Montrer que si  $(a_n, b_n) \neq (0, 0)$  alors pour  $k$  assez grand,  $g_k$  ne pourrait s'annuler que  $2n$  fois sur l'intervalle  $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ .

5) Conclure.

## III. L'inégalité de Bernstein.

On se propose de dans cette partie de démontrer l'inégalité de Bernstein :

$$\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe  $u \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(u) = \|f'\|_\infty$  et  $f'(u) > n\|f\|_\infty$ . On note  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$h(x) = \left[ \frac{1}{n} \|f'\|_\infty \sin(n(x-u)) \right] - f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1) Montrer que  $h \in \mathcal{T}_n$ .

2) Soit  $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ . Montrer que  $h$  admet au moins un zéro sur l'intervalle

$$\left[ u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, u + \frac{\pi}{2n} + \frac{(k+1)\pi}{n} \right].$$

3) Calculer  $h'(u)$  et montrer que  $h'$  s'annule au moins  $2n+1$  fois sur l'intervalle  $[u, u+2\pi]$ .

4) Calculer  $h''(u)$  et montrer que  $h''$  s'annule au moins  $2n+1$  fois sur  $[u, u+2\pi]$ . En déduire une expression explicite de  $f$ .

5) Les hypothèses faites sur  $f$  sont-elles compatibles entre elles ?

6) Pour toute fonction  $f \in \mathcal{T}_n$  et tout entier  $k \geq 0$ , établir l'inégalité

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq n^k \|f\|_\infty.$$

Si  $k$  et  $n$  sont fixés, existe-t-il des fonctions pour lesquelles l'égalité est atteinte ?

## **Problème 2 : Développement de fonctions en série entière**

Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide.

On dit qu'une fonction  $f$  est développable en série entière en  $a$  s'il existe  $r > 0$  et une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que pour tout  $x \in I$  vérifiant  $|x - a| < r$ , on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n$$

### **I. Quelques exemples :**

1) Montrer que les fonctions  $x \in ]-1, 1[ \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $x \in ]-1, 1[ \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$  sont développables en série entière en  $a = 0$ .

2) a. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, démontrer que la fonction  $x \in ]-1, 1[ \mapsto \ln(1-x)$  est développable en série entière en 0. De manière plus précise, on s'attachera à prouver que pour  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  :

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

b. Démontrer que  $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ .

### **II. Régularité des fonctions développables en séries entières**

On admettra que si  $f$  est développable en série entière en  $a$  avec pour  $x \in ]a-r, a+r[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]a-r, a+r[$  et que la dérivée de  $f$  s'obtient en dérivant terme à terme la série :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \quad \text{pour } x \in ]a-r, a+r[.$$

1) Démontrer que si  $f$  est développable en série entière en  $a$  sur  $]a-r, a+r[$ , on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \text{pour } x \in ]a-r, a+r[.$$

2) On définit pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

a. Soit  $n \geq 0$ . Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n}$ .

b. Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et qu'il existe  $P_n$  une fonction polynômiale définie sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

On exprimera  $P_n(y)$  en fonction de  $P_{n-1}(y)$  pour  $n \geq 1$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

- c. Montrer que  $f$  est continue, puis de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- d. Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
- e.  $f$  est-elle développable en série entière en 0 ? Conclusion ?

### III. Principe des zéros isolés :

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  développable en série entière en  $a \in I$  :

$$\text{pour } x \in ]a - r, a + r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n$$

1) On suppose qu'il existe  $p \geq 0$  tel que  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$  et  $a_p \neq 0$ . Démontrer l'existence de  $0 < s \leq r$  tel que si  $x \in ]a - s, a + s[$  et  $x \neq a$ ,  $f(x) \neq 0$ .

2) Montrer que s'il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  de  $]a - r, a + r[$ , les  $x_n$  étant distincts de  $a$ , convergeant vers  $a$  et vérifiant  $f(x_n) = 0$ ,  $f$  est en fait nulle sur  $]a - r, a + r[$ .

### IV. Applications :

On se donne une fonction  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On suppose qu'il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $x \in I$  et tout  $n \geq 0$  :

$$|f^{(n)}(x)| \leq Mn!$$

1) Démontrer que  $f$  est développable en série entière en tout point  $a$  de  $I$ .

On suppose de plus que  $f$  admet une infinité de zéros dans un segment  $[\alpha, \beta] \subset I$ .

2) Montrer l'existence de  $c \in I$  tel que  $f$  est nulle sur un voisinage de  $c$ .

3) Démontrer que  $f$  est nulle sur  $I$ .