HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}4

Samedi 30 novembre 2002

- Durée : 4 heures -

Les deux exercices et le problème sont totalement indépendants. Il est demandé de rédiger le premier exercice sur un premier ensemble de copies relevé au bout de deux heures trente minutes. Le second ensemble de copie relevé au bout des quatre heures portera la rédaction du second exercice et du problème.

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé.

On laissera une marge à gauche.

Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Exercice 1 :

1) Question préliminaire : soit K un réel $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant la suite $\beta_n = \alpha_n - L$ où L vérifie $L = 4L + K$, exprimer α_n en fonction de n. A quelle condition cette suite converge t-elle ?

On admettra la continuité des fonctions arcsin et arccos sur $[-1, 1]$.

Le problème étudie la convergence simultanée des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 + 2b_nc_n \\ b_{n+1} = b_n^2 + 2c_na_n \\ c_{n+1} = c_n^2 + 2a_nb_n \end{cases}$$

avec $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n = a_n + b_n + c_n \\ y_n = a_n + jb_n + j^2c_n \\ z_n = a_n + j^2b_n + jc_n \end{cases}$$

a. Calculer $1 + j + j^2$.

b . Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent si, et seulement si, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{C}$.

Exprimer dans ces conditions les limites a, b et c des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement, en fonction des limites x, y et z des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement.

c . Déterminer les relations de récurrence permettant de calculer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

d . Donner ensuite la relation de récurrence existant entre y_{n+2} et y_n, et celle existant entre z_{n+2} et z_n.

3) Etudier en fonction de $x_0 \in \mathbb{R}$ la limite de la suite définie par $x_{n+1} = x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^4$.

a. Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Que dire du point de vue de la convergence lorsque $|u_0| \neq 1$.

5) On suppose dans cette question que $|u_0| = 1$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ et on écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{i\alpha_n}$ avec $\alpha_n \in]-\pi, \pi]$.

a. On suppose de plus ici que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = 1$. Montrer qu'alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, $\alpha_n = \arcsin(\mathcal{I}m\,(u_n))$. En déduire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b . Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α où α appartient à l'ensemble $\left\{-\dfrac{2\pi}{3}, 0, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

c. Etablir pour $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un unique entier relatif k_n tel que $\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 2k_n\pi$. Déduire de ce qui précède que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite k qu'on exprimera en fonction de α.

d. Montrer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Démontrer qu'il en va de même de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6) On suppose que $u_0 = e^{i\alpha_0}$ avec $\alpha_0 \in]-\pi, \pi]$. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'existence de $\alpha \in \left\{-\dfrac{2\pi}{3}, 0, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$ et de $N \in \mathbb{N}$ tel que $4^N\alpha_0 - \alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$.

7) On considère à nouveau les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On écrit $y_0 = |y_0|e^{i\alpha_0}$ avec $-\pi < \alpha_0 \leqslant \pi$.

a. Déduire des résultats précédents une condition nécessaire et suffiante de convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ portant sur $|x_0|$, $|y_0|$ et α_0.

b. Déterminer toutes les valeurs possibles du triplet (a, b, c).

Exercice 2 : Propriété de Borel-Lebesgue

I. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$ et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$$

1) On note E l'ensemble des $x \in [a, b]$ tel qu'il existe $J_x \subset I$ fini avec $[a, x] \subset \displaystyle\bigcup_{i\in J_x} \Omega_i$.

a. Montrer que $a \in E$.

b. Montrer que E est un intervalle.

c. Montrer que $\sup E \in E$

d. Montrer que $\sup E = b$.

e. En déduire qu'il existe $J \subset I$ fini tel que $[a, b] \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i$.

2) Soit $F \subset \mathbb{R}$. On suppose F est compacte. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $F \subset \displaystyle\bigcup_{i\in I} \Omega_i$. En introduisant $U = \mathbb{R}\backslash F$ et en utilisant la question précédente, prouver qu'il existe $J \subset I$ fini tel que

$$F \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i$$

II. Soit $F \subset \mathbb{R}$. On suppose que pour toute famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $F \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $F \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i$. En considérant $(]-n,+n[)_{n\geqslant 1}$, prouver que F est borné. Soit $a \in \bar{F}$. En considérant $(\mathbb{R}\backslash[a-1/n, a+1/n])_{n\geqslant 1}$, prouver que $a \in F$. En déduire que F est compact.

Problème : Séries d'Engel

Soit $x_0 \in]0,1]$. L'algorithme de Briggs consiste à définir :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_0}\right) + 1 \\ x_1 = u_0 x_0 - 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_n = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_n}\right) + 1 \\ x_{n+1} = u_n x_n - 1 \end{cases}$$

I. Propriétés de l'algorithme de Briggs

1) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_0 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \ldots + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n} + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n} x_{n+1}$$

4) Démontrer que

$$x_0 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \ldots + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n}$$

II. Unicité du développement en série de Engel

On suppose ici que

$$x_0 = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_0 m_1} + \ldots + \frac{1}{m_0 m_1 \ldots m_n} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{m_0 m_1 \ldots m_n}$$

où $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{N}^*$ croissante.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$m_0 m_1 \ldots m_n \geqslant 2^{n+1}$$

En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{m_0 m_1 \ldots m_n}$.
2) Démontrer que $m_0 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_0}\right) + 1 = u_0$.
3) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = u_n$.
Ainsi, tout réel $x_0 \in]0,1]$ peut s'écrire

$$x_0 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \ldots + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n}$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{N}^*$ croissante. Ce développement est donc unique et est connu sous le nom de développement en série de Engel.

4) Déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $x_0 = e-2$ (on rappelle que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$).

III. Caractérisation des rationnels

1) On suppose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante à partir d'un certain rang. Montrer que

$$x_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_n} \quad \text{est un rationnel.}$$

2) Réciproquement, on suppose que $x_0 \in \mathbb{Q}$ et $x_0 = \frac{A_0}{B_0}$ avec A_0 et B_0 dans $\mathbb{N}^*$.
a. Montrer qu'il existe $A_1 \leqslant A_0$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$x_1 = \frac{A_1}{B_0}$$

b. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

3) En déduire que e est irrationnel.

4) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ est irrationnel.

5) Montrer que $e^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

IV. Formule de Stratemeyer

Soit $t_0 \in \mathbb{N}^*$, $t_0 \neq 1$. On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $t_{n+1} = 2t_n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $x_0 = t_0 - \sqrt{t_0^2 - 1}$.

1) Montrer que $x_0 \in]0,1]$, $u_0 = 2t_0$ et exprimer x_1 en fonction de t_1.

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'algorithme de Briggs relative à x_0 est donné par $u_n = 2t_n$ et donc

$$x_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1} t_0 t_1 \dots t_n}$$