HX3 **Mathématiques**

Devoir surveillé N^{o}3

Mercredi 13 novembre 2002

- Durée : 3 heures -

Les quatre exercices et le problème sont totalement indépendants. Il est demandé de rédiger les quatre exercices sur un premier ensemble de copies relevé au bout de deux heures. Le second ensemble de copie relevé au bout des trois heures portera la rédaction du problème.

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé.

On laissera une marge à gauche.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé, on mettra seulement en évidence les numéros des questions traitées. Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte. Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie.

Exercice 1 :

Soit α et β dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la quantité

$$(\cos\alpha + \cos\beta + i(\sin\alpha + \sin\beta))^n + (\cos\alpha + \cos\beta - i(\sin\alpha + \sin\beta))^n$$

est égale à

$$2^{n+1}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^n \cos\frac{n(\alpha+\beta)}{2}$$

Exercice 2 :

Soit $S = \left\{x \in \mathbb{R}, \exists (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, x = \dfrac{m}{2^n}\right\}$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in D$ tel que $0 < \alpha < \varepsilon$.

2) Démontrer que D est une partie dense de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée (i.e. majorée et minorée). Démontrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A.$$

Exercice 4 :

Pour quelles valeurs l'identité suivante a t-elle un sens ?

$$\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 2x}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right)=\frac{\tan 2^{n-1}x}{\tan\frac{x}{2}}.$$

Démontrer l'identité pour ces valeurs.

Problème : Équation de Pell-Fermat

Dans tout le problème, d désigne un entier naturel qui n'est le carré d'aucun entier (on dit que d n'est pas un *carrée parfait*). L'objet du problème est d'établir l'existence d'une infinité de solutions de l'équation :

$$(E) \quad x^2 - dy^2 = 1$$

où les inconnues x et y sont dans $\mathbb{Z}$.

I. Première partie : un lemme d'arithmétique

Montrer que d n'est le carré d'aucun rationnel.

II. Deuxième partie : l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

On note $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{z \in \mathbb{R}, \exists (x,y) \in \mathbb{Q}^2, z = x + y\sqrt{d}\}$.

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer l'équivalence :

$$x + y\sqrt{d} = 0 \iff x = y = 0$$

En déduire que pour tout $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $z = x+y\sqrt{d}$.

2) Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{z \in \mathbb{R}, \exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2, z = x + y\sqrt{d}\}$.

3) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un anneau intègre pour les lois usuelles.

Pour $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, $z = x + y\sqrt{d}$ avec $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$, on note $\bar{z} = x - y\sqrt{d}$ et $N(z) = z\bar{z}$.

4) a. Montrer que si $(z,z') \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]^2$, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$, $\overline{\overline{z}} = z$.

b. Montrer que pour tout $(z,z') \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]^2$, $N(zz') = N(z)N(z')$ et que $N(z) = 0$ si et seulement si $z = 0$.

5) Soit $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si, et seulement si, $N(z) = \pm 1$.

6) Soit $f : \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ un morphisme de corps.

a. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = q$.

b. Montrer que f est l'identité ou $z \longmapsto \overline{z}$.

III. Troisième partie : théorème d'approximation de Dirichlet

On note pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{frac}(x) = x - E(x)$ la *partie fractionnaire de x*. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $N \geqslant 1$ un entier.

1) Montrer qu'il existe deux entiers i et j tels que $0 \leqslant i < j \leqslant N$ et :

$$|\mathrm{frac}(j\alpha) - \mathrm{frac}(i\alpha)| < \frac{1}{N}$$

2) En déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$1 \leqslant b \leqslant N \quad \text{et} \quad \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{Nb}$$

3) Soit n et p deux entiers relatifs, $p > 0$. On suppose que la fraction $\dfrac{n}{p}$ est écrite avec p minimal. A l'aide de la question précédente, prouver l'existence de $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $an - bp = 1$. Quel théorème retrouve t-on ainsi ?

4) On suppose α irrationnel. En raisonnant par l'absurde, prouver qu'il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$$

IV. Quatrième partie : recherche d'une solution particulière de (E)

1) Prouver l'existence d'une infinité de couples $(p,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $n > 0$ tel que $|p - n\sqrt{d}| \leqslant \dfrac{1}{n}$. On note E l'ensemble de tels couples.

2) Soit $(p,n) \in E$. Montrer que :

$$|p + n\sqrt{d}| \leqslant \frac{1}{n} + 2n\sqrt{d} \text{ puis que } 1 \leqslant |p^2 - dn^2| \leqslant 1 + 2\sqrt{d}$$

3) Etablir l'existence de $A \in \mathbb{Z}$, $A \neq 0$ tel que :

$$F = \{(p,n) \in E, p^2 - dn^2 = A\} \text{ est infini.}$$

4) A l'aide d'une fonction de F dans $\mathbb{Z}/A\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/A\mathbb{Z}$, justifier l'existence de $(p,n) \in F$ et $(q,m) \in F$ tels que : $p + n\sqrt{d} \neq \pm\,(q + m\sqrt{d})$ et A divise $p - q$ et $n - m$.

5) Démontrer que $z_0 = \dfrac{p + n\sqrt{d}}{q + m\sqrt{d}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

6) Calculer $N(z_0)$ et en déduire que si $z_0 = x + y\sqrt{d}$ avec $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, le couple (x,y) est bien une solution de l'équation de Pell-Fermat (E) avec $y \neq 0$.

V. Cinquième partie : infinité des solutions de (E)

On considère $z_0 = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ avec (x,y) solution de l'équation (E) et $y \neq 0$.

1) Prouver que les z_0^n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts.

2) En déduire l'existence d'une infinité de couples solutions de (E).